微分方程式入門

～電気回路を通して専門分野と数学のつながりを体感しよう～

永原 健大郎　卯花 竜也

東京工業大学附属科学技術高等学校

2021 年 1 月 25 日

目次

第 1 章

Introduction

本教材は，2020 年度に東京工業大学附属科学技術高等学校の数学 Ⅲβ のクラスで，微分方程式の入門となる講義と，工学的な応用を実際に電気電子分野の卯花竜也教諭と共に演習して実施した授業で使用したものである．あくまでも入門的な内容であるため，数学的な厳密性などは多少省いている点があるところをご了承いただきたい．

物理学の理学的側面から学ぶ電磁気学と，工学的側面から学ぶ電気回路理論は，もちろん同じものを対象としているのだが，その取扱いは大きくギャップがあるように思われる．ここでは，電気回路理論において使われる法則に的を絞って解説をしたい．本来であれば，電磁気学で重要な**マクスウェル (Maxwell) 方程式**を紹介して，3 次元空間における電磁場を回路素子という点に押し込めた結果，これまで紹介してきたような微分方程式（より正確には，**常微分方程式**という）に簡略化されることに焦点を当てて解説をするべきではあるが，多変数の微分積分学をある程度準備する必要があり，時間が足りない．ここではこのぐらいのお話にとどめておくことにする．なお，本章の内容は，國友，他 10 名 [2]，および砂川 [3] を参考にした．

1.1 回路素子による電位差

ここでは，回路素子として，抵抗器，コンデンサー，コイルを考え，その電位差について簡単にまとめる．

1.1.1 抵抗器

導体に流れる電流の大きさ I は導体に加える電圧 V に比例する．これを**オーム (Ohm) の法則**という．

オームの法則 (Ohm's law)

$I(t)$ を時刻 t における電流，$V(t)$ を時刻 t における電圧とする．このとき，比例定数 R が存在して

$$V(t) = I(t)R \tag{1.1}$$

が成立する．

この法則は，電流と電場が時間的に変化するときにおいても，その変動が極めて大きいとき以外はそのまま成り立つことが実験的に示されている．

1.1.2 コンデンサー

2 個の導体があって，時刻 t においてその一方である導体 ① に電荷 $+Q(t)$，他方の導体 ② に電荷 $-Q(t)$ が与えられていて，導体 ① から出た電気力線が全て導体 ② に入るような体系を**コンデンサー**という．ここで，同じ時刻 t における導体 ① の電位を $\phi_1(t)$，導体 ② の電位を $\phi_2(t)$ として，電圧 $V(t)$ を $V(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ とする．

コンデンサーの静電容量

コンデンサーの静電容量 C は，2 個の導体間の電圧を 1[V] だけ増加させるのに必要な電荷量として，

$$C = \frac{Q(t)}{V(t)} \tag{1.2}$$

で表される．

コンデンサーの静電容量 C は，本来であれば時間的に変化しない電荷 Q と電圧 V について定義されるものであるが，電気工学においては大雑把な近似を使って，電荷 Q が時間的に変化するときも使えるものとして扱う．

注意 1. 導体の断面を微小時間 Δt の間に $\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$ の電気量が通過するときの電流は，

$$I(t) \simeq \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

で与えられる．したがって，$\Delta t \to 0$ とすれば

$$I(t) = \frac{d}{dt}Q(t) \tag{1.3}$$

を満たすことに注意しよう．電荷 $Q(t)$ が変化しない，つまり電荷が移動しなければ $I(t) = 0$ である．

1.1.3　コイル

電気回路の任意の閉回路を一つ選び，これを l とする．時刻 t において，閉回路 l を横切る磁束を $\Phi(t)$ とするとき，次のファラデー (Faraday) の電磁誘導の法則が成り立つ．

ファラデーの電磁誘導の法則 (Faraday's law of induction)

閉回路 l を横切る磁束 $\Phi(t)$ が t により変化するとき，閉回路 l に生じる誘導起電力 (電位差)$V(t)$ は

$$V(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) \tag{1.4}$$

で表される．

このことを，コイルに応用してみよう．時刻 t においてコイルを貫く磁束を $\Phi(t)$，コイルを流れる電流を $I(t)$ とすると，磁束 $\Phi(t)$ は電流 $I(t)$ に比例する．すなわち，$\Phi(t) = kI(t)$ を満たす比例定数 k が存在する．また，コイルが N 巻きであったとすると，1 巻きのコイル（閉回路）に生じる誘導起電力が連続して N 回発生し，1 巻きのコイルの誘導起電力の N 倍となる．このとき，ファラデーの電磁誘導の法則より，

$$V(t) = -N\frac{d}{dt}\Phi(t) = -N\frac{d}{dt}kI(t) = -Nk\frac{d}{dt}I(t)$$

となる．したがって，次のコイルの自己誘導が得られる．

コイルの自己誘導 (self-induction)

コイルに流れる電流を $I(t)$ とすると，コイルの誘導起電力 (電位差)$V(t)$ は

$$V(t) = -L\frac{d}{dt}I(t) \tag{1.5}$$

で表される．この定数 $L = Nk$ を，コイルの**自己インダクタンス (self-inductance)** という．

なお，電流が変化すると磁場が発生するため，複数のコイルを回路に入れる際は相互誘導を考える必要があるが，複雑になるため今回は考えない．

1.2　キルヒホッフの法則

抵抗器，コイル及びコンデンサを素子に持つ，（線状の）導体からなる回路に対して成立する法則である．実際には，物理学の電磁気学で現れる電場や磁場に関する方程式の解を，とても上手に近似することで得られる．

キルヒホッフの第 1 法則 (Kirchhoff's current law)

電気回路の任意の接点において，流れ込む向きを正（又は負）と統一するとき，各線の電流 I_k の総和は 0 となる．すなわち，選んだ接点に時刻 t において流れ込む電流を $I_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{N} I_k(t) = 0 \tag{1.6}$$

が成立する．

キルヒホッフの第 2 法則 (Kirchhoff's voltage law)

電気回路の任意の閉回路に対し，電圧の向きを一方向に取るとき，閉回路に沿った各素子の電位差 V_k の総和は 0 である．すなわち，抵抗器，コイル，コンデンサー，電源の各素子による時刻 t における電位差を $V_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots, N)$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{N} V_k(t) = 0 \tag{1.7}$$

が成立する．

なお，このキルヒホッフの第 1，第 2 法則は，直流回路でも交流回路でも成立するので，安心して使ってよい．（なぜ成立するのかに突っ込むと半年はかかるので要注意.）

例 1. 図 1.1 のように，電池，電荷のないコンデンサー，抵抗器，スイッチを接続した直流回路を考える．$R[\Omega]$ は抵抗値，C[F] は静電容量，V_0[V] は起電力とする．

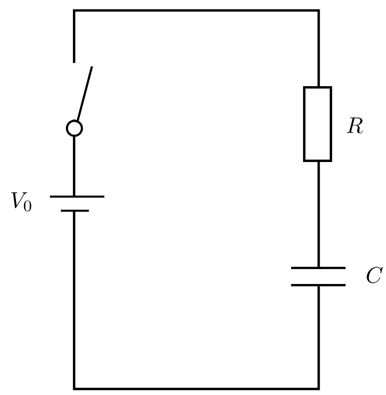

図 1.1　RC 直流回路

1. この直流回路にキルヒホッフの第 2 法則 (1.7) を用いた式を立てよ．
   閉回路を時計周りに一周回ったとき，(1.7) は
   $$V_0 - I(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0$$
   で与えられる．なお，この両辺を t で微分すると，
   $$R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}\frac{d}{dt}Q(t) = 0$$

ここで，電流と電荷の関係式 (1.3) を用いれば,

$$R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0 \tag{1.8}$$

を得る．

2. 電源を入れた瞬間，$R = 4[\Omega]$，$V_0 = 8[\mathrm{V}]$ だった場合に閉回路を流れる電流は何 [A] か.
   この場合は，コンデンサーに電荷がないため，(1.7) は $V_0 - IR = 0$ となる．従って，$I = 2[\mathrm{A}]$ を得る．
3. 電源を入れてから十分時間がたったあと，閉回路を流れる電流は何 [A] か.
   この場合は，充電が終了しコンデンサーへは電荷が流れ込まなくなる．このとき，コンデンサーの部分は断線しているとみなせるので，回路を流れる電流は 0[A] である．

例 2. 図 1.2 のように，交流電源，抵抗器，コンデンサーを接続した交流回路を考える．$R[\Omega]$ は抵抗値，$L[\mathrm{H}]$ は自己インダクタンス，$C[\mathrm{F}]$ は静電容量，V_0 は交流電圧 $V(t) = V_0 \sin\omega t$ の最大値，ω を交流の角周波数とする．

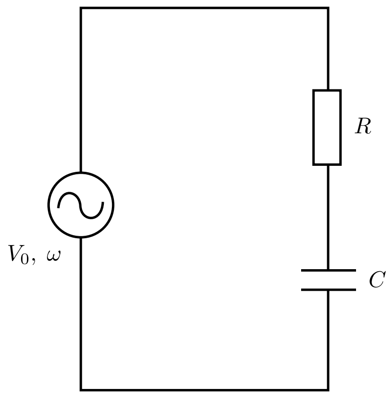

図 1.2　RC 交流回路

1. この交流回路にキルヒホッフの第 2 法則 (1.7) を用いた式を立てよ.
   この場合は，各法則を用いれば
   $$V_0 \sin\omega t - I(t)R - \frac{Q(t)}{C} = 0$$
   を得る．ここで，電流 $I(t)$ だけで記述される方程式に変形するため，両辺を t で微分すると，
   $$V_0\omega \cos\omega t - R\frac{d}{dt}I(t) - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0$$
   したがって，(1.3) を用いれば，方程式
   $$R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}I(t) = \omega V_0 \cos\omega t \tag{1.9}$$
   を得る．

当面，この (1.9) を実際に解いてみることが目標となる．

例 3. 図 1.3 のように，交流電源，抵抗器，コイル，コンデンサーを接続した交流回路を考える．$R[\Omega]$ は抵抗値，$L[\mathrm{H}]$ は自己インダクタンス，$C[\mathrm{F}]$ は静電容量，V_0 は交流電圧 $V(t) = V_0 \sin\omega t$ の最大値，ω を交流の角周波数とする．

1. この交流回路にキルヒホッフの第 2 法則 (1.7) を用いた式を立てよ.
   この場合は，各法則を用いれば
   $$V_0 \sin\omega t - I(t)R - L\frac{d}{dt}I(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

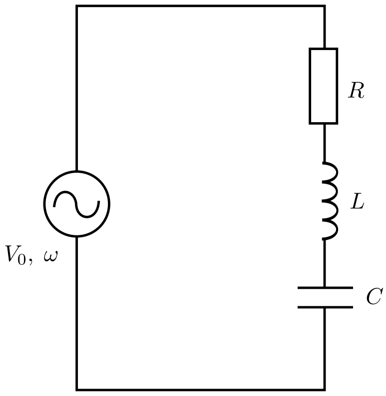

図 1.3　RLC 交流回路

を得る．ここで，電流 $I(t)$ だけで記述される方程式に変形するため，両辺を t で微分すると，

$$V_0\omega\cos\omega t - R\frac{d}{dt}I(t) - L\frac{d^2}{dt^2}I(t) - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0$$

したがって，(1.3) を用いれば，方程式

$$L\frac{d^2}{dt^2}I(t) + R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}I(t) = \omega V_0\cos\omega t \tag{1.10}$$

を得る．これが解けたら RLC 交流回路は問題なく扱えるであろう．

第 2 章

微分方程式の基礎

基本的には高校数学でいう数学 III の範囲まではわかっているという前提で話を進めるが，もしも危ない場合は適宜戻って復習してほしい．なお，第 2 章以降を構成するにあたっては，柳田-栄 [1] を参考にした．

2.1 微分方程式の基本的な用語

x を変数とする関数 y があり，y の x に関する導関数

$$y' = \frac{d}{dx}y,\ y'' = \frac{d^2}{dx^2}y,\ \cdots,\ y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}y$$

で作られる方程式

$$f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(n)}) = 0$$

を，**微分方程式（常微分方程式）**といい，n をその**階数**という．ここで，方程式の左辺にある $f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(n)})$ は，例えば $f(x,\ y,\ y') = x^2 + 2y^2 - y' - 1$ などのように，x や y，y'，$y^{(n)}$ などを組み合わせて作られる式を表す．階数が n である微分方程式を n **階の微分方程式**ということもある．上の方程式をみたす n 回微分可能な関数 $y = \varphi(x)$ を，その方程式の**解**という．すなわち，

$$f(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \cdots,\ \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

である，一般に，n 階の微分方程式は，最大で n 個の任意定数，あるいは積分定数と呼ばれる定数を持つことが知られている．

例 4.

微分方程式 $\dfrac{d}{dx}y = x^2 \Longleftrightarrow y' - x^2 = 0$　(1 階微分方程式) を解け．

方程式から，y は x^2 の原始関数であることが読み取れるから，この微分方程式の解は

$$y = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{ は任意定数}) \tag{2.1}$$

である．実際，$\left(\dfrac{1}{3}x^3 + C\right)' = x^2$ より，$y = \dfrac{1}{3}x^3 + C$ はこの方程式を満たすことが分かる．

このような，最大 n 個の任意定数を持つ解のことを，**一般解**という．一般解に対し，任意定数に特定の数を与えた解のことを**特殊解**という．例えば，一般解 $y = \dfrac{1}{3}x^3 + C$ で，$C = 1$ とした $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 1$ は，特殊解である．ところで，微分方程式の中には，一般解に含まれる任意定数にどのような数を割り当てても表現できない解が存在するものがある．そのような解のことを**特異解**という．普通，微分方程式を解くとは，一般解と特異解をすべて求めることを指す．

問 1. 1 階の微分方程式

$$y' = \tan^2 x$$

を，例 4 に倣って解け．（ヒント：基本的な三角関数の相互関係 $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を用いて，右辺の被積分関数を積分できる形に変形せよ．）

次に，身近な微分方程式の例を見ていこう．

例 5.

x-y 平面上の点 $(0,\ -1)$ を通る直線全体が満たす微分方程式を求めよ．ただし，直線 $x = 0$ は除く．

この場合，y 切片が -1 であるような直線を考えればよいので，直線は傾き C を任意定数とする方程式

$$y = Cx - 1 \tag{2.2}$$

で表される．この方程式の両辺を x で微分すると，$y' = C$ を得る．この式を (2.2) に代入すると，微分方程式

$$y = y'x - 1 \tag{2.3}$$

を得ることができる．実際，直線の方程式 (2.2) を方程式 (2.3) に代入すれば，確かに方程式 (2.3) を満たすことが分かる．

例 6.

x-y 平面において，点 $(0,\ 2)$ を通り，軸が y 軸に平行な放物線全体が満たす微分方程式を求めよ．

点 $(0,\ 2)$ を通り，軸が y 軸に平行な放物線は，C_1，C_2 を任意定数として

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + 2 \tag{2.4}$$

と表すことができる．方程式 (2.4) 微分して，$y' = 2C_1 x + C_2$，$y'' = 2C_1$ を得る．ここから C_1，C_2 を消去すると，$C_1 = \dfrac{1}{2}y''$ より，$y' = 2 \cdot \dfrac{1}{2}y''x + C_2$．従って，$C_2 = y' - y''x$ となる．よって，$y = \dfrac{1}{2}y''x^2 + (y' - y''x)x + 2$ となり，整理すると，

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y - 4 = 0 \tag{2.5}$$

を得る．

問 2. x-y 平面において，曲線 $y = e^x$ に接する直線全体が満たす微分方程式を求めよ．

2.2　正規形の微分方程式

n 階の微分方程式において，最高階の導関数 $y^{(n)}$ について解けた形の微分方程式

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \cdots y^{(n-1)})$$

は**正規形**であるといい，そうでないときは**非正規形**であるという．1 階の微分方程式に限定して述べれば，y' について解けた形の微分方程式

$$y' = f(x,\ y)$$

が正規形の 1 階の微分方程式である．例えば，例 5 は，(2.3) を y' について解くと，

$$y' = \frac{y+1}{x}$$

となり，これは正規系である．もちろん，例 6 にある (2.5) を最高階の導関数である y'' について解くと

$$y'' = \frac{-2(y-b) + 2(x-a)y'}{(x-a)^2}$$

となり，これも正規形である．これらとは逆に，非正規形である状況をいくつか列挙してみよう．

1. 方程式を満たすような $y^{(n)}$ の値が存在しない場合
例えば，$(y')^2 + x^2 = -1$ は，実数の範囲では解が存在しない．$(y')^2 + x^2 = 1$ も，$|x| > 1$ に対しては実数の範囲では意味を持たない．
2. $x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)}$ から，$y^{(n)}$ の値がただ一つ決まらない場合
例えば，
$$(y')^2 = x(1-x)$$
のような状況では，$y' = \pm\sqrt{x(1-x)}$ となってしまい，どちらの値を選ぶかによって解の様子が変わってしまう．

他にも非正規形の微分方程式はいろいろな状況が想定されるが，今回はこれ以上立ち入らないことにする．

2.3　微分方程式の初期値問題

微分方程式は例 4 の (2.1) にあるように，一般解は任意定数を含んでおり，解が一つ定まるためには，何らかの条件が必要である．

例 7.

例 4 において，$x = 0$ とき $y = 2$，すなわち $y(0) = 2$ という条件を追加してみよ．

一般解 (2.1) に対して，$y(0) = 2$ を代入すると，
$$\frac{1}{3} \cdot 0^3 + C = 2$$
従って，$C = 2$ であり，このとき解は
$$y = \frac{1}{3}x^3 + 2$$
とただ一つに定まる．

一般に，n 階の微分方程式
$$f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(n)}) = 0$$
に対し，定数 $\alpha,\ \beta_0,\ \beta_1,\ \beta_{n-1}$ を与えて，
$$y(\alpha) = \beta_0,\ y'(\alpha) = \beta_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(\alpha) = \beta_{n-1}$$
を課したものを，**初期条件**といい，初期条件を満たす微分方程式の解を見つける問題を**初期値問題**あるいは**コーシー (Cauchy) 問題**という．ただし，場合によっては初期条件を満たす解が存在しなかったり，解が一つに定まらない場合もある．ここで，1 階の微分方程式に絞って述べれば，初期値問題は
$$\begin{cases} f(x,\ y,\ y') = 0 \\ y(\alpha) = \beta \end{cases}$$
と表すことができる．

例 8.

微分方程式 $y'' + 2y' = 0$ の一般解が，任意定数 C_1，C_2 を用いて $y = C_1 e^{-2x} + C_2$ で与えられることを確かめ，初期値問題
$$\begin{cases} y'' + 2y' = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$
の解を求めよ．

まず $y = C_1 e^{-2x} + C_2$ が解であることを確かめよう．両辺を x で微分すると，

$$\begin{cases} y' = -2C_1 e^{-2x} \\ y'' = 4C_1 e^{-2x} \end{cases}$$

より，

$$y'' + 2y' = 4C_1 e^{-2x} + 2(-2C_1 e^{-2x}) = 0$$

が成り立つ．したがって，$y = C_1 e^{-2x} + C_2$ は，微分方程式 $y'' + 2y' = 0$ の一般解である．次に，初期条件

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 = 1,\ y'(0) = -2C_1 e^0 = 2$$

より，連立方程式

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 = -1 \end{cases}$$

が立てられる．これを解けば，$C_1 = -1$，$C_2 = 2$ が得られ，上の初期値問題の解として，

$$y = -e^{-2x} + 2$$

を得る．

問 3. 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解が，任意定数 C_1，C_2 を用いて $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ で与えられることを確かめ，初期値問題

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = \sqrt{3},\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

の解を求めよ．

2.4　正規形の 1 階微分方程式に対する初期値問題

正規形の 1 階微分方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} y' = f(x,\ y) \\ y(\alpha) = \beta \end{cases} \tag{2.6}$$

について考える．この初期値問題の右辺にある $f(x,\ y)$ は，x と y の 2 つの変数に依存する関数である．すなわち，x-y 平面上に定義され，グラフが図 2.1 のような絨毯のようになる関数とみてよい．このような関数 $f(x,\ y)$ を 2 **変数関数**という．$f(x,\ y)$ は x-y 平面上の領域 D で連続であるとする．（x-y 平面上の領域 D で連続というのは，図 2.1 のようにグラフを書けば切れ目のない絨毯のようなグラフが描けることを表す．厳密な取り扱いは大変なのでここでは避ける．）さらに，関数 $f(x,\ y)$ は**リプシッツ (Lipschitz) 条件**と呼ばれる次の条件を満たすとする．

リプシッツ条件

領域 D 上の任意の 2 点 $(x,\ y)$，$(x,\ z)$ に対して，

$$|f(x,\ z) - f(x,\ y)| \leqq L|z - y|$$

を満たす正の定数 $L > 0$ が存在する．

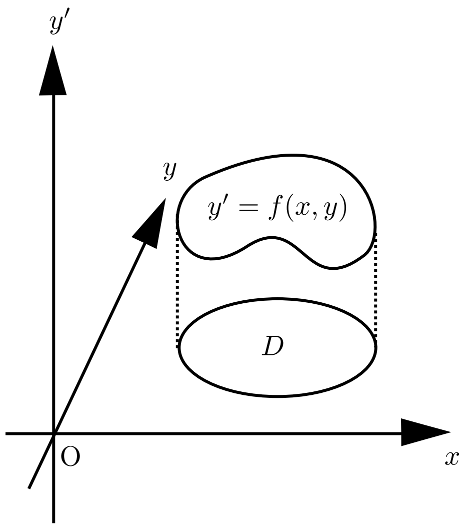

図 2.1　2 変数関数

注意 2. リプシッツ条件を満たす関数はどんな関数なのか，という疑問が生じるであろう．よく見ると，この条件は微分の定義によく似ていることに気が付く．実際，領域 D 上の点 $(x_0,\ y_0)$ での関数 $f(x,\ y)$ の y に関する微分

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+h)-f(x_0,\ y_0)}{h}=\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,\ y_0)$$

に対し，D 上のどの点でも

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,\ y_0)\right|\leqq L$$

を満たすような正の定数 L が存在すれば，リプシッツ条件が成立する．なお，このように 2 つの変数がある関数のうち，片方の変数 x は固定して定数として考え，y のみを動かして普通の 1 つの変数を持つ関数として微分することを**偏微分する**といい，このとき得られた $(x_0,\ y_0)$ での微分係数を $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x_0,\ y_0)$ と書き，**点** $(x_0,\ y_0)$ **における偏微分係数**という．

この領域 D が次のような点 $(\alpha,\ \beta)$ を中心に含む横が $2a$，高さが $2b$ の境界を含む長方形であったとする．

$$D=\{(x,\ y)\mid |x-\alpha|\leqq a,\ |y-\beta|\leqq b\}$$

このとき，初期値問題 (2.6) の右辺の関数 $f(x,\ y)$ がリプシッツ条件を満たすなら，次の**コーシー (Cauchy) の定理**と呼ばれる重要な定理が成り立つ．

コーシーの定理

領域 D における $|f(x,\ y)|$ の最大値を M とすると，初期値問題 (2.6) の解が

$$|x-\alpha|\leqq\min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$$

に対してただ一つだけ存在する．ここで，$\min\left\{a,\ \dfrac{b}{M}\right\}$ は，a と $\dfrac{b}{M}$ の 2 つの正の数のうち大きくない方を表す．

このコーシーの定理を証明は大変重要なのであるが，高校の段階で行うのは相当大変なので，ここでは取り扱わない．このリプシッツ条件が満たされていないとき，初期値問題 (2.6) の解は存在するが，ただ一つではない例を見てみよう．

例 9.

初期値問題 (2.6) において，

$$\begin{cases}f(x,\ y)=\sqrt{|y|},\\ y(0)=0\end{cases}\tag{2.7}$$

とした初期値問題を考える．このとき，$f(x,\ y)=\sqrt{|y|}$ は，$y=0$ でリプシッツ条件を満たさないことを示せ．

Proof.

$$\frac{|f(x,\ y)-f(x,\ 0)|}{|y-0|}=\frac{\sqrt{|y|}}{|y|}=\frac{1}{\sqrt{|y|}}\to\infty\ (y\to 0)$$

□

このとき，初期値問題 2.7 は，$y\equiv 0$(注：記号 $\equiv$ は，y が x にかかわらず恒等的に値が 0 になるという意味) を解に持つことはすぐに確かめられる．実は，これ以外にも $a>0$ を正の定数として，

$$y=\begin{cases}0 & (0\leqq x\leqq a)\\ \dfrac{1}{4}(x-a)^2 & (x>a)\end{cases}$$

も，初期値問題 (2.7) の解となる．実際，

1. $0 \leqq x \leqq a$ のとき，$y(0) = 0$ であるから初期条件を満たす．方程式の右辺について，$y'(x) = 0$．また，左辺についても $\sqrt{|y(x)|} = 0$ であるから，両辺が一致する．
2. $x > a$ のとき，左辺については，
$$y' = \frac{1}{4} \cdot 2(x-a) = \frac{1}{2}(x-a).$$
また，右辺については，
$$\sqrt{|y|} = \sqrt{\left|\frac{1}{4}(x-a)^2\right|} = \frac{1}{2}|x-a| = \frac{1}{2}(x-a)$$
となり，やはり両辺が一致する．以上から，初期値問題 (2.7) の解は確かに存在するが，ただ一つではない．

第 3 章

初等解法

3.1 変数分離形

1 階の正規形の微分方程式

$$y' = f(x,\ y)$$

において，右辺の関数 $f(x,\ y)$ が

$$f(x,\ y) = X(x) \cdot Y(y)$$

のように，x のみの関数 $X(x)$ と，y のみの関数 $Y(y)$ の積の形でかけている場合，つまり

$$y' = X(x)Y(y) \tag{3.1}$$

の形の微分方程式を**変数分離形**という．具体的に，変数分離形の微分方程式の解法を見ていこう．まず，$Y(y) \neq 0$ と改定して，(3.1) の両辺を $Y(y)$ で割り，

$$\frac{1}{Y(y)} y'(x) = X(x)$$

の形で書き直す．この式の両辺を x で積分すると，

$$\int \frac{1}{Y(y(x))} y'(x) dx = \int X(x) dx$$

ここで，左辺については置換積分の公式 (A.3) から，

$$\int \frac{1}{Y(y)} dy = \int X(x) dx$$

であることがわかる．よって，任意定数 C を用いて，

変数分離形の一般解

$$\int \frac{1}{Y(y)} dy = \int X(x) dx + C \tag{3.2}$$

を得ることができた．(3.2) において，$\dfrac{1}{Y(y)}$ や，$X(x)$ は，必ずしも原始関数が具体的に求まるとは限らないことに気を付けよう．たとえこれらが求まったとしても，未知関数 y について陽に解ける (すなわち，$y = \boxed{x \text{ の式}}$ の形に書ける) とも限らない．そこで，いったん (3.2) の形で，x と y との関係が書き下せたと考えて，(3.2) を (3.1) の一般解とみなす．

注意 3. 以上の計算では，$Y(y) \neq 0$ として話を進めたが，$y = a$ で $Y(a) = 0$ となる場合はどうなるだろうか．この場合，定数関数 $y \equiv a$ が方程式 (3.1) を満たすことはすぐにわかる．したがって，$f(x,\ y) = X(x)Y(y)$ がリプシッツ条件を満たす場合，ある点 $x = x_0$ で，$y(x_0) = a$ を満たすとすると，必ず $y(x) \equiv a$ でなければならない．逆に，$Y(y(x_0)) \neq 0$ となる点 $x = x_0$ が存在すれば，任意の x で $Y(y(x)) \neq 0$ でなければならない．

例 10.

次の変数分離形で表される微分方程式

$$y' = 2y \tag{3.3}$$

を解け．

$y \neq 0$ と仮定する．方程式を

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2$$

のように変形すると，これは変数分離形である．この両辺を x で積分すると，公式 (3.2) より

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2dx$$

となる．この両辺を積分して

$$\log |y| = 2x + C.$$

それゆえ,

$$\log |y| = \log e^{2x+C} = \log \left(e^{2x} e^{C}\right).$$

ここで，対数の性質 $\log M = \log N \Leftrightarrow M = N$ を用いると,

$$|y| = Ae^{\mu x}$$

を得る．なお，ここでは $A = e^C > 0$ と任意定数を取り直した．左辺に絶対値がついているので,

$$y = \pm Ae^{\mu x}$$

となるが，任意定数 A を $A \neq 0$ とすれば右辺の符号 $\pm$ は吸収され，一般解

$$y = Ae^{\mu x}$$

を得る．また，代入すれば簡単にわかるが，$y \equiv 0$ も方程式 (3.3) の解である．以上より，一般解，特異解がすべて調べられ，方程式 (3.3) を解くことができた．

問 4. 微分方程式 $y' = -3y$ を解け．

例 11.

微分方程式

$$y' = \mu y \left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{3.4}$$

の一般解を求めよ．ただし，μ，K は 0 でない定数とする．

なお，数理生物学ではこれをロジスティック方程式と呼び，μ を内的成長率，K を環境容量という．$y \neq 0$, K と仮定する．方程式を

$$\frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} \cdot y' = \mu$$

のように変形すると，これは変数分離形である．この両辺を x で積分すると，公式 (3.2) より

$$\int \frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} dy = \int \mu dx$$

となる．ここで，左辺の被積分関数について部分分数分解を行う．定数 A，B を用いて,

$$\frac{1}{y\left(1 - \frac{y}{K}\right)} = \frac{K}{y\,(K-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{K-y}$$

とおくと，両辺に $y(K-y)$ を掛けて

$$K = A(K-y) + By \Leftrightarrow (-A+B)y + (-K+AK) = 0$$

を得る．y に関しての恒等式であることから，A と B に関する連立方程式

$$\begin{cases} K - AK = 0 \\ -A + B = 0 \end{cases}$$

を解くと，$A=1$，$B=1$ となる．従って，

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} \right) dy = \int \mu dx.$$

この両辺を積分して

$$\log|y| - \log|K-y| = \mu x + C.$$

それゆえ，

$$\log\left|\frac{y}{K-y}\right| = \log e^{\mu x + C} = \log\left(e^{\mu x} e^{C}\right).$$

ここで，対数の性質 $\log M = \log N \Leftrightarrow M = N$ を用いると，

$$\left|\frac{y}{K-y}\right| = Ae^{\mu x}$$

を得る．なお，ここでは $A = e^C > 0$ と任意定数を取り直した．左辺に絶対値がついているので，

$$\frac{y}{K-y} = \pm Ae^{\mu x}$$

となるが，任意定数 A を $A \neq 0$ とすれば右辺の符号 $\pm$ は吸収され，

$$\frac{y}{K-y} = Ae^{\mu x}$$

を得る．ここで，両辺に $K-y$ を掛けて y について解くと

$$y\left(1 + Ae^{\mu x}\right) = KAe^{\mu x}$$

より，一般解

$$y = \frac{KAe^{\mu x}}{1 + Ae^{\mu x}}$$

を得る．また，代入すれば簡単にわかるが，$y \equiv 0$，および $y \equiv K$ も方程式 (3.4) の解である．以上より，一般解，特異解がすべて調べられ，方程式 (3.4) を解くことができた．

問 5. 次の変数分離形で表される微分方程式

$$y' = ay$$

を解け．ただし，a は実数の定数とする，（ヒント：$a=0$ と $a \neq 0$ で場合分けせよ．$a \neq 0$ のとき，一般解を $y \neq 0$ と仮定して解く．すぐにわかるが，$y \equiv 0$ が特異解であることに注意.）

問 6. 次の変数分離形で表される微分方程式

$$y' = \sin x \tan y$$

を解け．

　この他，うまく変数変換を施すことによって，変数分離形に帰着できる微分方程式も数多くあるが，ここまでの取り扱いにしておく．さて，ここで始めの例題に上げた回路の微分方程式 (1.8) がすでに解けるようになっていることに気が付いたであろうか．

問 7. 次の変数分離形で表される初期値問題 (1.8)

$$\begin{cases} I'(t) = -\dfrac{1}{RC} I(t), \\ I(0) = 2 \end{cases}$$

を解け.

3.2　1 階線形微分方程式

y を x の関数とする．y と y' についての 1 次の微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3.5}$$

を，1 階線形微分方程式という．特に，$Q(x) \equiv 0$ のとき，方程式は**同次 (homogeneous)** であるといい，そうでない $Q(x) \not\equiv 0$ の場合は**非同次 (non-homogeneous)** であるという．同次 1 階線形微分方程式

$$y' + P(x)y = 0 \tag{3.6}$$

は,

$$y' = -P(x)y$$

と変形すれば，変数分離系であることが分かる．従って，公式 (3.2) によって，一般解は

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -P(x)dx + C$$

と表せる．ゆえに左辺の不定積分について計算すれば,

$$\log|y| = -\int P(x)dx + C$$

となる．対数の性質 $e^p = M \Leftrightarrow p = \log M$ を用いて両辺の対数を取れば,

$$|y| = Ce^{-\int P(x)dx}$$

を得る．ここで任意定数 C は，元の e^C を取り直したものである．（何度も任意定数を取り直す必要が出てくる場合は，このように混乱が生じない範囲で同じ記号 C を使うことがよくある．）例 11 と同様，任意定数を $C \neq 0$ の範囲で考えると，絶対値が外せて

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{3.7}$$

を得る．なお，このように自然対数の底 e の肩に乗る指数の式の表記が大きくなり，見ずらくなることがある．このような場合は，e^A を $\exp A$ と表して,

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} = C\exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

のように表記することもある．次に，非同次 1 階線形微分方程式 (3.5) を解こう．多少天下り的ではあるが,

$$\varphi(x) = \exp\left(-\int P(x)dx\right) \tag{3.8}$$

とおく．この関数 $y = \varphi(x)$ は，微分方程式 (3.6) の解である．実際，方程式に代入すれば,

$$\varphi'(x) + P(x)\varphi(x) = -P(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right) + P(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right) = 0$$

となり，確かに微分方程式 (3.6) の解である．さらに，補助的な未知の関数 $z(x)$ を用いて，y を

$$y = \varphi(x)z(x) \tag{3.9}$$

と表す．このようにおいた y を方程式 (3.5) に代入すれば，右辺は

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= \{\varphi(x)z(x)\}' + P(x)\varphi(x)z(x) \\ &= \varphi'(x)z(x) + \varphi(x)z'(x) + P(x)\varphi(x)z(x) \\ &= \varphi(x)z'(x) + \{\varphi'(x) + P(x)\varphi(x)\}z(x) \\ &= \varphi(x)z'(x) \end{aligned}$$

となる，最後の式変形には，φ が方程式 (3.6) の解であることを用いた．したがって，

$$\varphi(x)z'(x) = Q(x)$$

となり，

$$z'(x) = \frac{Q(x)}{\varphi(x)}$$

と表せる．このことは z に関する微分方程式が得られたことに対応し，例 4 のように z は $\dfrac{Q(x)}{\varphi(x)}$ の原始関数である．ゆえに，

$$z(x) = \int \frac{Q(x)}{\varphi(x)} dx + C$$

と解くことができる．したがって，求める一般解 y は $y = \varphi(x)z(x)$ で表されるから，

$$y = \varphi(x) \left\{ \int \frac{Q(x)}{\varphi(x)} dx + C \right\}$$

となり，方程式 (3.5) の一般解を求めることができた．(3.8) を用いて，具体的な形でまとめると，

非同次 1 階線形微分方程式の一般解

$$y = \exp\left(-\int P(x)dx\right) \left\{ \int Q(x) \exp\left(\int P(x)dx\right) dx + C \right\} \tag{3.10}$$

さて，ここで (3.7) と (3.9) を見比べると，

$$y = C\exp\left(-\int P(x)dx\right),\ y = z(x)\exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

であり，同次 1 階線形方程式の解にあった任意定数 C が，x の関数 $z(x)$ に置き換わっていることに気が付く．これは，同次方程式の一般解の任意定数 C を未知の関数 $z(x)$ に置き換え，z に関する新たな微分方程式を解くことでによって，非同次方程式の一般解が得られたことになる．このように，定数部分を変数で置き換えることによって微分方程式を解く方法を**定数変化法**という．

例 12.

定数変化法を用いて，

$$xy' - 2y = x^3 \cos x$$

を解け．

まず，同次方程式

$$xy' - 2y = 0$$

を解く．これは，$y' = y\dfrac{2}{x}$ となるので，変数分離形である．公式 (3.2) を用いると，

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x} dx + C$$

両辺を積分して，

$$\log|y| = 2\log|x| + C = \log(|x|^2 e^C)$$

したがって，任意定数を $C \neq 0$ と置き換えることで，絶対値を外して一般解

$$y = Cx^2$$

を得ることができる．定数変化法を用いて，C を未知の関数 $z(x)$ に置き換えると，

$$y = z(x)x^2$$

と表せる．$y' = z'(x)x^2 + 2z(x)x$ であるから，これを方程式に代入すれば，左辺は

$$x(z'(x)x^2 + 2z(x)x) - 2z(x)x^2 = z'(x)x^3$$

であるから，z に関する微分方程式

$$z'x^3 = x^3 \cos x$$

を得る．それゆえ，$z' = \cos x$ であるから，z は $\cos x$ の原始関数である．両辺を x で積分すると，

$$z(x) = \int \cos x dx = \sin x + C$$

となるから，一般解 $y = x^2(\sin x + C)$ を得る．

問 8. 定数変化法を用いて，

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3$$

を解け．

さて，いよいよ実験でも調べた交流回路 (1.9) の微分方程式を実際に解くときが来た．

問 9. 定数変化法を用いて，微分方程式 (1.9)

$$\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{RC}I(t) = \omega\frac{V_0}{R}\cos\omega t$$

を解け．（ヒント：途中で $\int e^{\frac{1}{RC}t}\cos\omega t$ の不定積分を求める必要がある．この不定積分の求め方がわからない場合は，付録にある公式 (A.18) を参照してほしい．

第 4 章

2 階定数係数線形微分方程式

RLC 交流回路から得られる方程式，すなわち 2 階定数係数線形微分方程式を解くための準備をする．この微分方程式を解くのに使う重要な道具が**オイラーの公式**と呼ばれる公式である．そのため，実数を複素数に移す関数を扱うことになるが，この微分方程式を解くことに限定すれば極めて限定的な道具しか使わなくて良いため，必要な部分だけを考えることにしよう．

4.1 オイラーの公式と指数関数の微分

いきなり，なぜオイラーの公式という複素数の式が出てくるのかと疑問になると思う．先走って最終的にやることを書くが，ここで解く微分方程式 $y'' + ay' + b = f(x)$ ($a,\ b$ は実数) の解法は，λ に関する 2 次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を解くことに帰着されるからである．既に数学 II で習ったように，2 次方程式の解は実数の範囲だけでは記述できず，共役な複素数を解に持つことがある．そのような場合の微分方程式を含めて扱えるようにするために，まずは必要最低限の道具を用意するところから始めよう．

重要な注意

ここに書かれている内容は，既に東工大附属高校がスーパーサイエンスハイスクール研究開発で作っているスーパーテキスト「数理応用」の 12 章「複素解析入門」で詳細に解説されています．本校の生徒は必ず読むこと．

以下では，i は虚数単位，$\mathbb{C}$ を複素数全体を表すものとする．

オイラーの公式

x を任意の実数とし，e を自然対数の底とする．このとき，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つ．

この公式の証明を精密に行うと，実は数理応用で解説されている内容よりも多くの準備を必要とするので，雰囲気だけ解説しよう．複素数 z を変数にもつ指数関数 e^z，余弦関数 $\cos z$，正弦関数 $\sin z$ をそれぞれ無限級数を用いて次のように定義する．

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{4.1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{4.2}$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{4.3}$$

変数 z が実数なら，この定義は通常の指数関数，余弦関数，正弦関数と一致することが知られている（原点を中心とするテイラー (Taylor) 展開という方法を用いる）．また，証明は準備が大変なため省略するが，e^z，$\cos z$，$\sin z$ は何回で

も微分ができる滑らかな関数で，定義および二項定理から，複素数 z，w に対し，和に関する指数法則 $e^{z+w}=e^ze^w$ が成立する．ここで，等式 (4.1) の z に $z=ix$（ただし，x は実数）を代入すると，

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= 1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots+\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \\
&= 1+\frac{x}{1!}i-\frac{(x)^2}{2!}-\frac{(x)^3}{3!}i+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}i+\cdots \\
&= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)+\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)i \\
&= \cos x+i\sin x
\end{aligned}$$

となり，公式を得る．**この講義では以降，関数 $f(x)$ の値域が複素数になることはあっても，変数 x は必ず実数である．**
さて，ここで重要な公式を証明しよう．任意の複素数 $\lambda=a+bi$ (a, b は実数) に対し，

$$(e^{\lambda x})'=\lambda e^{\lambda x} \tag{4.4}$$

を導こう．関数 $f(x)$ が $f(x)=u(x)+iv(x)$ で表されるとする．ここで，$u(x)$ と $v(x)$ はそれぞれ $f(x)$ の実部と虚部であり，x に関して微分可能な関数であるとする．このとき，導関数 $f'(x)$ は i を単なる文字とみて

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)+iv(x+h)-(u(x)+iv(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+i\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)+iv'(x)
\end{aligned}$$

で定義される．くどいようであるが，h や x は実数であるから，文字 i が入っている以外は通常の微分と何ら変わりがない．すなわち，$e^{\lambda x}$ の微分を考えるときは，和に関する指数法則 $e^{\lambda x}=e^{ax+ibx}=e^{ax}e^{i(bx)}$ を利用して，積の微分法と合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{\lambda x} &= \frac{d}{dx}(e^{ax}e^{i(bx)})=ae^{ax}e^{i(bx)}+e^{ax}\frac{d}{dx}e^{i(bx)} \\
&= ae^{ax}e^{i(bx)}+e^{ax}\left(\frac{d}{dx}\cos bx+i\frac{d}{dx}\sin bx\right) \\
&= ae^{ax}e^{i(bx)}+e^{ax}\left(-b\sin bx+ib\cos bx\right) \\
&= ae^{ax}e^{i(bx)}+e^{ax}ib\left(\cos bx-\frac{1}{i}\sin bx\right) \\
&= ae^{ax}e^{i(bx)}+e^{ax}ib\left(\cos bx+i\sin bx\right) \\
&= e^{ax}(a+ib)e^{i(bx)}=\lambda e^{(a+ib)x}=\lambda e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

を得る．したがって，公式 (4.4) が導かれたことになる．

4.2　同次 2 階定数係数線形微分方程式

この章では，実数 x を変数とする関数 y に関する同次 2 階定数係数線形微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \quad (a,b \text{ は実数の定数}) \tag{4.5}$$

について考えることにする．1 階微分 $\dfrac{d}{dx}={}'$ を D，2 階微分 $\dfrac{d^2}{dx^2}={}''$ を D^2 などと表すことにすると，この方程式は

$$(D^2+aD+b)y=0$$

と書き直すことができる．ただし左辺の意味は，形式的に分配法則を適用して，

$$(D^2+aD+b)y=D^2y+aDy+by=y''+ay'+by$$

のことと考える．

注意 4. 1 階微分 $\dfrac{d}{dx} = {}'$ を表す D は，y に対して $\dfrac{d}{dx}$ と同じ位置で使うため，Dy と表すことはあるが，yD とは書かないことに注意しよう．関数の右側に D を書いてしまうと，どの関数を微分するのかがわからなくなってしまう．

問 10. 1 階微分 $'$ を D，2 階微分 $''$ を D^2 などと表すことにして，微分方程式 $y''+3y'-18y=0$ を D を用いて表せ．

問 11. 1 階微分 $'$ を D，2 階微分 $''$ を D^2 などと表すことにして，微分方程式 $(D^2+5D+4)y=0$ について D を用いず具体的な微分方程式で表せ．

次に，複素数 λ_1，λ_2 を用いて表される

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=0 \tag{4.6}$$

という形の微分方程式を考えてみよう．ところでこの微分方程式は具体的にはどういう微分方程式を表すのだろうか．これは，左辺の $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$ を，形式的に D をあたかも数のように扱って展開して

$$D^2-(\lambda_1+\lambda_2)D+\lambda_1\lambda_2$$

とする．これを用いて元の微分方程式の $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$ を置き換えると，

$$(D^2-(\lambda_1+\lambda_2)D+\lambda_1\lambda_2)y=0$$

を得る．すなわち，

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$$

という微分方程式を表す．もちろん，λ_1，λ_2 の順番なども関係ない．ただ，D は微分を表しているから，このように形式的な展開をしてよいのかが気になるであろう．この展開を正当化するために，$\lambda=a+bi$ (a, b は実数) のときに

$$D(\lambda y)=\lambda(Dy) \tag{4.7}$$

が成り立つことを確かめる．定義通りに計算して，

$$\begin{aligned}
D(\lambda y)=(\lambda y)' &= \lim_{h\to 0}(a+bi)\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(a\frac{y(x+h)-y(x)}{h}+ib\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\right)\\
&= a\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}+ib\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\\
&= \lambda\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h)-y(x)}{h}=\lambda y'=\lambda(Dy)
\end{aligned}$$

を得る．これは，係数 λ と微分 D の入れ替えが自由にできることを表している．したがって，

$$\begin{aligned}
(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y &= (D-\lambda_1)(y'-\lambda_2 y)\\
&= D(y'-\lambda_2 y)-\lambda_1(y'-\lambda_2 y)\\
&= (y'-\lambda_2 y)'-\lambda_1 y'+\lambda_1\lambda_2 y\\
&= y''-\lambda_2 y'-\lambda_1 y'+\lambda_1\lambda_2 y\\
&= y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y\\
&= (D^2-(\lambda_1+\lambda_2)D+\lambda_1\lambda_2)y\\
&= (D^2-(\lambda_1+\lambda_2)D+\lambda_1\lambda_2)y
\end{aligned}$$

となり，結果的に D を数のように扱っても問題なかったことがわかる．このように，y' を Dy と表すことによって，本来であれば関数と切り離すことができない微分という操作を，あたかも二つの数 D と y の積 $D\cdot y$ のように扱った．このような見方をするとき，微分 D を**微分演算子**という．また，(4.6) の左辺のように，複素数を係数とした微分演算子 D の多項式を**微分作用素**という．微分作用素においては，D^n は n 階微分を表し，複素数 λ は単に λ 倍することを表す．また，このときの y は微分作用素（もしくは微分演算子）が**作用する関数**という．

ここにきて，我々が解きたい微分方程式 $y'' + ay' + by = (D^2 + aD + b)y = 0$ ($a,\ b$ は実数) と，微分方程式 $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = (D^2 - (\lambda_1+\lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2)y = 0$ の微分演算子を見比べると，λ_1 と λ_2 は

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -a \\ \lambda_1\lambda_2 = b \end{cases} \tag{4.8}$$

を満たす 2 数であることに気が付く．つまり，微分方程式 (4.15) が与えられたとき，微分演算子を $D^2 + aD + b = D^2 - (\lambda_1+\lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2 = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)$ と書き換えれば，(4.6) の微分方程式 $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = 0$ を考えることに帰着される．ちなみに，このような 2 数 λ_1，λ_2 に，何か見覚えはないだろうか．そう，数学 II で習った**解と係数の関係**である．すなわち，λ_1，λ_2 を求めるには，補助的な 2 次方程式

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{4.9}$$

を解けばよい．なぜなら，この 2 次方程式の解は解の公式から，

$$\lambda = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2},\ \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

で与えられ，

$$\begin{aligned} \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} + \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} &= -a \\ \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \cdot \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} &= \frac{a^2-(a^2-4b)}{4} = b \end{aligned}$$

を満たすからである．なお，この補助的な 2 次方程式 (4.9) は**特性方程式**という名前がついている．

注意 5. 微分作用素において微分 D と複素数の係数 λ は入れ替えることができるが，注意 4 でも述べたように，微分作用素と関数 y との順番の入れ替えはできない．

注意 6. このように D という記号は便利で，似たような発想で割り算 $\dfrac{1}{D-\lambda}$ を考えたくなるが，これは積分（方程式を解く操作）に対応するため，注意を要する．

問 12. 微分作用素を用いて，

$$\left(D - \frac{3+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(D - \frac{3-\sqrt{7}i}{2}\right)y = 0$$

と表される微分方程式を具体的に表せ．

以下では，このような微分演算子 D を用いて方程式 (4.15) の性質を調べよう．まず，次の重要な公式を用意する．任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，

$$e^{-\lambda x}(y' - \lambda y) = (e^{-\lambda x}y)' \tag{4.10}$$

が成り立つ．

Proof. 積の微分法から，

$$(e^{-\lambda x}y)' = (e^{-\lambda x})'y + e^{-\lambda x}y' = -\lambda e^{-\lambda x}y + e^{-\lambda x}y' = e^{-\lambda x}(y' - \lambda y)$$

□

(4.10) を D という記号を用いて表現すると，

$$e^{-\lambda x}(D-\lambda)y = D(e^{-\lambda x}y) \tag{4.11}$$

となる．ここで左辺は，

$$e^{-\lambda x}(D-\lambda)y = e^{-\lambda x}(Dy - \lambda y) = e^{-\lambda x}(y' - \lambda y)$$

という意味である．(4.15) を調べる前に，次の変数分離形の微分方程式

$$y' - \lambda y = 0 \quad (\text{ただし}, \lambda = a + bi\ (a,\ b\ \text{は実数}))$$

を調べよう．なお，この左辺を D という記号を用いて書き表すと，

$$y' - \lambda y = Dy - \lambda y = (D - \lambda)y$$

であるから，

$$(D - \lambda)y = 0 \tag{4.12}$$

について考えることと言い換えることができる．(4.12) はもちろん変数分離形の微分方程式の解法を用いて考えてもよいが，ここでは (4.11) を用いて方程式を解くことを考えてみよう．(4.12) の両辺に $e^{-\lambda x}$ をかけて，(4.11) を用いると

$$e^{-\lambda x}(D - \lambda)y = D(e^{-\lambda x}y) = 0$$

となる．

ここで，$D(e^{-\lambda x}y) = 0$ を解くために，関数 $f(x) = u(x) + iv(x)$ の原始関数 $F(x)$ を考えよう．$U'(x) = u(x)$，$V'(x) = v(x)$ を満たす $U(x)$，$V(x)$ を用いて $F(x) = U(x) + iV(x)$ とおくとき，$U(x)$，$V(x)$ はそれぞれ $u(x)$，$v(x)$ の原始関数であるから，

$$F'(x) = U'(x) + iV'(x) = u(x) + iv(x)$$

となり，$F'(x) = f(x)$ となるので，$f(x)$ の原始関数である．この原始関数 $F(x)$ に**複素数の積分定数** C を付けたもの全体を

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

と書き，$f(x)$ の**不定積分**と呼ぶ．[*1]なお，原始関数 $U(x)$，$V(x)$ は，数学 II や数学 III で学んだものと何ら変わりがないため，

$$\int u(x)dx = U(x) + C_1,\ \int v(x)dx = V(x) + C_2 \quad (C_1,\ C_2\ \text{は実数の積分定数})$$

が成り立つ，したがって，積分定数を $C = C_1 + iC_2$ で表すと，

$$\begin{aligned}
F(x) + C &= U(x) + iV(x) + C_1 + iC_2 \\
&= (U(x) + C_1) + i(V(x) + C_2) \\
&= \int u(x)dx + i\int v(x)dx \\
&= \int (u(x) + iv(x))dx = \int f(x)dx
\end{aligned}$$

となる．最後の行の等号は，$\displaystyle\int f(x)dx$ の定義を用いた．このことは，積分においても実部と虚部を分けて計算してよいということを表している．

注意 7. 複素数の定数関数 $f(x) = C_1 + iC_2$ を微分すると，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C_1 + iC_2 - (C_1 + iC_2)}{h} = 0$$

であるから，定数 $C = C_1 + iC_2$ は微分すると 0 になる．

前置きが長くなったが，以上のことを用いて $D(e^{-\lambda x}y) = 0$ の両辺を積分すると，

$$\int D(e^{-\lambda x}y)dx = \int (e^{-\lambda x}y)'dx = e^{-\lambda x}y + C \quad (\text{ただし，複素数}\ C\ \text{は積分定数})$$

[*1] これは高校での数学と同じような定義の方法で，厳密な定義とは順番が異なるが，準備が大変になるためこの方法を採用した．

となり，$e^{-\lambda x}y + C = 0$ を得る．任意定数 C を右辺に移項して取り直せば，$e^{-\lambda x}y = C$ と表せる．よって，両辺に $e^{\lambda x}$ を掛ければ，

$$e^{\lambda x}e^{-\lambda x}y = e^{\lambda x}C$$

左辺は，指数法則により

$$e^{\lambda x}e^{-\lambda x}y = e^{\lambda x-\lambda x}y = y$$

となるので，微分方程式の解 $y = Ce^{\lambda x}$ が得られた．不定積分を複素数まで拡張すれば，直接変数分離法の解法を用いるよりはだいぶ簡単に解けたことになる．

次に，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，微分方程式 (4.6)，すなわち $(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = 0$ を公式 (4.11) を使って解くことを考えよう．$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = 0$ の両辺に $e^{-\lambda_1 x}$ をかけて，(4.11) を用いると，左辺は

$$e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_1)\{(D-\lambda_2)y\} = D\{e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_2)y\}$$

と変形される．したがって，方程式 (4.6) は $D\{e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_2)y\} = 0$ となった．この両辺を積分すれば，複素数 C_1 を任意定数として，

$$e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_2)y = C_1$$

を得る．両辺に $e^{\lambda_1 x}$ を掛ければ，

$$(D-\lambda_2)y = C_1e^{\lambda_1 x}$$

となる．この両辺に対し，さらに $e^{-\lambda_2 x}$ をかければ，

$$e^{-\lambda_2 x}(D-\lambda_2)y = e^{-\lambda_2 x}C_1e^{\lambda_1 x}$$

となる．そこで (4.11) を用いると，

$$D(e^{-\lambda_2 x}y) = C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$$

と変形される．そこで，再び両辺を積分すると，

$$e^{-\lambda_2 x}y = \int C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx$$

を得る．

ここで，不定積分 $e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx$ を計算する必要が出てくる．複素数 λ に対して，$F'(x) = e^{\lambda x}$ となる原始関数 $F(x)$ はどのような関数であろうか．結論から言うと，

$$\int e^{\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C \quad (\text{ただし，複素数 } C \text{ は積分定数})$$

である．これは，(4.4) と (4.7) を用いた計算

$$\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x}\right)' = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda x}\right)' = \frac{1}{\lambda}\lambda e^{\lambda x} = e^{\lambda x} \tag{4.13}$$

により確かめることができる．

話を元に戻すと，上の不定積分の公式から，

$$e^{-\lambda_2 x}y = \int C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx = \frac{C_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2} + C_2$$

を得る．よって，両辺に $e^{\lambda_2 x}$ をかければ

$$y = \frac{C_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

ここで，任意定数 $\dfrac{C_1}{\lambda_1-\lambda_2}$ を改めて C_1 と取り直せば，

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} \tag{4.14}$$

を得る．さて，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の場合，これまで述べてきた解の求め方から，(4.6) の解は (4.14) の形のものですべて求まったことがわかる．その一般解を与えている関数 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ と $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ は，それぞれ微分方程式 $(D - \lambda_1)y = 0$ と $(D - \lambda_2)y = 0$ を満たしている．これは，ちょうど λ に関する 2 次方程式 $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$ の解が，$\lambda - \lambda_1 = 0$ と $\lambda - \lambda_2 = 0$ の解ですべて求まっていることに対応していると思うことができるのである．これが，この章の冒頭で述べた 2 次方程式を解くことに帰着されるということの意味である．

もう少し，ここで得られた議論を整理しよう．そもそも λ_1，λ_2 は (4.8) を満たす 2 数，すなわち 2 次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の 2 つの解であったため，次の 3 通りが考えられる．

- **Case 1.** λ_1，λ_2 は異なる 2 つの実数解
- **Case 2.** $\lambda_1 = \lambda_2$ となる重解
- **Case 3.** λ_1，λ_2 は異なる 2 つの虚数解

ここで，**Case 2.** の重解 $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合はまだ議論していないので，先に **Case 1** と **Case 3** について議論しよう．なお，**Case 3** の場合は，2 次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の係数が実数なので，解の公式から λ_1，λ_2 は互いに共役な複素数となる．

Case 1. λ_1**，**λ_2 **が実数である場合**

この時は，これ以上一般解を整理することはできないので，そのまま

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

が一般解である．

Case 3. λ_1**，**λ_2 **が互いに共役な複素数である場合**

この時は，実数 p，q を用いて，$\lambda_1 = p + qi$，$\lambda_2 = p - qi$ と書くことができる．すなわち一般解 (4.14) は，

$$y = C_1 e^{(p+qi)x} + C_2 e^{(p-qi)x}$$

と表せる．ここで，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を思い出そう．すると右辺は，

$$\begin{aligned}
C_1 e^{(p+qi)x} + C_2 e^{(p-qi)x} &= C_1 e^{px} e^{i(qx)} + C_2 e^{px} e^{i(-qx)} \\
&= C_1 e^{px}(\cos qx + i \sin qx) + C_2 e^{px}(\cos(-qx) + i \sin(-qx)) \\
&= e^{px}(C_1(\cos qx + i \sin qx) + C_2(\cos qx - i \sin qx)) \\
&= e^{px}\{(C_1 + C_2)\cos qx + i(C_1 - C_2)\sin qx\}
\end{aligned}$$

となる．ここで，複素数の任意定数 C_1，C_2 を，次のように置き直そう．

$$\begin{aligned}
A_1 &= C_1 + C_2 \\
A_2 &= i(C_1 - C_2)
\end{aligned}$$

したがって右辺はさらに書き換えられ，

$$\begin{aligned}
e^{px}\{(C_1 + C_2)\cos qx + i(C_1 - C_2)\sin qx\} &= e^{px}\{A_1 \cos qx + A_2 \sin qx\} \\
&= A_1 e^{px} \cos qx + A_2 e^{px} \sin qx
\end{aligned}$$

と書き表すことができた．記号を統一するために改めて複素数の任意定数 A_1，A_2 をそれぞれ C_1，C_2 と置けば，一般解

$$y = C_1 e^{px} \cos qx + C_2 e^{px} \sin qx$$

を得る．最後に，

Case 2. $\lambda_1 = \lambda_2$ **となる場合**について考えよう．このとき，方程式 (4.6) は

$$(D - \lambda_1)^2 y = (D - \lambda_1)(D - \lambda_1)y = 0$$

と書き表すことができる．このとき，$(D - \lambda_1)(D - \lambda_1)y = 0$ の両辺に $e^{-\lambda_1 x}$ をかけて，(4.11) を用いると

$$e^{-\lambda_1 x}(D - \lambda_1)\{(D - \lambda_1)y\} = D\{e^{-\lambda_1 x}(D - \lambda_1)y\}$$

したがって，方程式 $(D-\lambda_1)(D-\lambda_1)y=0$ は $D\{e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_1)y\}=0$ と変形された．この両辺を積分すれば，複素数 C_1 を任意定数として，

$$e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_1)y=C_1$$

を得る．両辺に $e^{\lambda_1 x}$ を掛ければ，

$$(D-\lambda_1)y=C_1e^{\lambda_1 x}$$

となる．この両辺に対し，さらに $e^{-\lambda_1 x}$ をかければ，

$$e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_1)y=e^{-\lambda_1 x}C_1e^{\lambda_1 x}$$

となる．ここで，左辺は $e^{-\lambda_1 x}C_1e^{\lambda_1 x}=e^{(\lambda_1-\lambda_1)x}C_1=C_1$ になることに注意しよう．そこで (4.11) を用いると，

$$D(e^{-\lambda_1 x}y)=C_1$$

と変形される．そこで，再び両辺を積分すると，

$$e^{-\lambda_1 x}y=\int C_1dx$$

を得る．

ここで左辺について考えると，不定積分 $\int C_1dx$ を計算する必要が出てくる．複素数 $C_1=p+qi$ (p, q は実数) に対して，$F'(x)=C_1$ となる原始関数 $F(x)$ はどのような関数であろうか．結論から言うと，

$$\int C_1dx=C_1x+C_2 \quad (\text{ただし，複素数 } C_2 \text{ は積分定数})$$

である．これは，定義と (4.7) を用いた計算

$$(C_1x+C_2)'=(px)'+i(qx)'+(C_2)'=p+qi=C_1$$

により確かめることができる．

話を元に戻すと，上の不定積分の公式から，

$$e^{-\lambda_1 x}y=\int C_1dx=C_1x+C_2$$

を得る．よって，両辺に $e^{\lambda_1 x}$ をかければ，一般解

$$y=e^{\lambda_1 x}(C_1x+C_2)$$

を得ることができる．以上で当初の狙いであった微分方程式 (4.15) の一般解を完全に求めることができた．まとめると，次の公式になる．

同次 2 階定数係数線形微分方程式の解の公式

微分方程式 $y''+ay'+b=0$ (a, b は実数の定数) の解は，特性方程式 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ の解 λ_1，λ_2 を用いて，次の 3 通りに場合分けされる．

- **Case 1.** λ_1，λ_2 は異なる 2 つの実数解

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

- **Case 2.** $\lambda_1=\lambda_2$ となる重解

$$y=e^{\lambda_1 x}(C_1x+C_2)$$

- **Case 3.** λ_1，λ_2 は異なる 2 つの虚数解
  このとき，解 λ_1，λ_2 は互いに共役な複素数である．実数 p，q を用いて $\lambda_1=p+qi$，$\lambda_2=p-qi$ とすると，

$$y=C_1e^{px}\cos qx+C_2e^{px}\sin qx$$

ただし，複素数 C_1，C_2 は任意定数である．

これらの一般解 y はいずれの場合も，2 つの異なる関数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ を用いて，

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

と書き表すことができる．この異なる 2 つの関数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ を同次 2 階定数係数線形微分方程式の**基本解**という．

　このようにまとめるとスッキリしたような感覚もするが，これを丸暗記するのは得策とは言えない．微分作用素を使い，公式 (4.11) を使い解いていく解法に慣れていく方が長い目で見てもよいであろう．

例 13.

微分方程式 $y'' + 3y' - 28y = 0$ を解け．

同次 2 階定数係数線形微分方程式であるから，まずは左辺を微分作用素を用いて表すと，

$$(D^2 + 3D - 28)y = 0$$

これはわざわざ特性方程式を立てるまでもなく，そのまま因数分解できるので，

$$(D + 7)(D - 4)y = 0$$

となる．ここで両辺に e^{7x} を掛けて公式 (4.11) を用いると，左辺は

$$e^{7x}(D + 7)\{(D - 4)y\} = D\{e^{7x}(D - 4)y\}$$

と変形できるので，方程式は $D\{e^{7x}(D - 4)y\} = 0$ となる．従って，両辺を積分すれば，任意定数を複素数 C_1 とおくと

$$e^{7x}(D - 4)y = C_1$$

従って，$(D - 4)y = C_1e^{-7x}$ を得る．この両辺に e^{-4x} を掛けると，

$$e^{-4x}(D - 4)y = e^{-4x}C_1e^{-7x} = C_1e^{-(4+7)x}$$

となり，再び左辺に公式 (4.11) を用いると，

$$D(e^{-4x}y) = C_1e^{-11x}$$

を得る．したがって，両辺を積分すると，任意定数を複素数 C_2 とおけば，

$$e^{-4x}y = \int C_1e^{-11x}dx = \frac{C_1e^{-11x}}{-11} + C_2$$

それゆえ，両辺に e^{4x} をかけて，任意定数 C_1 を取り直すことにより，一般解

$$y = C_1e^{-7x} + C_2e^{4x}$$

を得る．

問 13. 微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解け．

例 14.

微分方程式 $y'' + 2y' + y = 0$ を解け．

同次 2 階定数係数線形微分方程式であるから，まずは左辺を微分作用素を用いて表すと，

$$(D^2 + 2D + 1)y = (D + 1)^2y = (D + 1)(D + 1)y = 0$$

と書き表すことができる．このとき，$(D + 1)(D + 1)y = 0$ の両辺に e^x をかけて，(4.11) を用いると

$$e^x(D + 1)\{(D + 1)y\} = D\{e^x(D + 1)y\}$$

したがって，方程式 $(D+1)(D+1)y=0$ は $D\{e^x(D+1)y\}=0$ と変形された．この両辺を積分すれば，複素数 C_1 を任意定数として，

$$e^x(D+1)y=C_1$$

を得る．両辺に e^{-x} を掛ければ，

$$(D+1)y=C_1e^{-x}$$

となる．この両辺に対し，さらに e^x をかければ，

$$e^x(D+1)y=e^xC_1e^{-x}$$

となる．ここで，左辺は $e^xC_1e^{-x}=e^{(1-1)x}C_1=C_1$ になることに注意しよう．そこで (4.11) を用いると，

$$D(e^xy)=C_1$$

と変形される．そこで，再び両辺を積分すると，

$$e^xy=\int C_1dx$$

を得る．右辺については，複素数 C_2 を任意定数として $\int C_1dx=C_1x+C_2$ であるから，

$$e^xy=C_1x+C_2$$

となる．したがって，両辺に e^{-x} を掛けることにより，一般解

$$y=e^{-x}(C_1x+C_2)$$

を得る．

問 14. 微分方程式 $y''-6y'+9y=0$ を解け．

例 15.

微分方程式 $y''+\omega^2y=0$（ただし，$\omega>0$ は実数の定数）を解け．

同次 2 階定数係数線形微分方程式であるから，まずは左辺を微分作用素を用いて表すと，

$$(D^2+\omega^2)y=0$$

これもわざわざ特性方程式を立てるまでもなく，そのまま因数分解できるので，

$$(D-i\omega)(D+i\omega)y=0$$

となる．ここで両辺に $e^{-i\omega x}$ を掛けて公式 (4.11) を用いると，左辺は

$$e^{-i\omega x}(D-i\omega)\{(D+i\omega)y\}=D\{e^{-i\omega x}(D+i\omega)y\}$$

と変形できるので，方程式は $D\{e^{-i\omega x}(D+i\omega)y\}=0$ となる．従って，両辺を積分すれば，任意定数を複素数 C_1 とおくと

$$e^{-i\omega x}(D+i\omega)y=C_1$$

従って，$(D+i\omega)y=C_1e^{i\omega x}$ を得る．この両辺に $e^{i\omega x}$ を掛けると，

$$e^{i\omega x}(D-4)y=e^{i\omega x}C_1e^{i\omega x}=C_1e^{2i\omega x}$$

となり，再び左辺に公式 (4.11) を用いると，

$$D(e^{i\omega x}y)=C_1e^{2i\omega x}$$

を得る．したがって，両辺を積分すると，任意定数を複素数 C_2 とおけば,

$$e^{i\omega x}y = \int C_1 e^{2i\omega x}dx = \frac{C_1 e^{2i\omega x}}{2i\omega} + C_2$$

それゆえ，両辺に $e^{-i\omega x}$ をかけて，任意定数 C_1 を取り直すことにより，一般解

$$y = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x}$$

を得る．ここで，オイラーの公式を用いると,

$$y = C_1(\cos\omega x + i\sin\omega x) + C_2(\cos(-\omega x) + i\sin(-\omega x)) = C_1(\cos\omega x + i\sin\omega x) + C_2(\cos\omega x - i\sin\omega x)$$

となる．これを再び整理すると,

$$y = (C_1 + C_2)\cos\omega x + i(C_1 - C_2)\sin\omega x$$

となり，再び $C_1 + C_2$，$i(C_1 - C_2)$ を任意定数 C_1，C_2 で取り直せば,

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$$

を得る．

なお，この微分方程式は単振動の運動方程式

$$mx''(t) = -kx(t)$$

と同じ方程式であることにも注目したい．この運動方程式を書き直せば,

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

となり，先ほどと同様に解くことで,

$$x(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

を得ることができる．

問 15. 微分方程式 $y'' + y' + y = 0$ を解け．（ヒント：やることは変わりないが，特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ を解くことにより，方程式を (4.6）の形に帰着させせよ．

4.3　非同次 2 階定数係数線形微分方程式

この章では，実数 x を変数とする関数 y に関する非同次 2 階定数係数線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (a, b \text{ は実数の定数}) \tag{4.15}$$

について考えることにする．先に結論から言うと，前節で求めた公式 (4.11) を使えば，この方程式は完全に解くことが可能である．

(4.15) の一般解 $y(x)$ を求めるためには，まず (4.15) の解 $y_0(x)$ を一つ見つけることが必要となる．（このような解を特殊解と言った．）何故ならば，もしこのような解 $y_0(x)$ が見つかれば，関数 z を $z = y - y_0$ とおくと，y と y_0 が 4.15) の解であることより，z に関する微分方程式は

$$\begin{aligned} z'' + az' + bz &= (y - y_0)'' + a(y - y_0)' + b(y - y_0) \\ &= y'' + ay' + by - (y_0'' + ay_0' + by_0) \\ &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

となり，z は微分方程式 $z'' + az' + bz = 0$ を満たすことが分かる．この方程式は同次 2 階定数係数線形微分方程式であるから，前節の議論を用いて解くことが可能であり，

$$z'' + az' + bz = (D^2 + aD + b)z = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)z = 0$$

と変形すれば，その一般解は基本解 $y_1(x)$，$y_2(x)$ を用いて，

$$z = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

のいずれかで表すことができる．従って，$z = y - y_0$ であったから，(4.15) の一般解 y は，

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0$$

の形で表すことができるのである．

そこで次の目標となるのは，方程式 (4.15) の解 $y_0(x)$ を一つ見つけ出すことである．まず，方程式 (4.15) の左辺を微分作用素を用いて，

$$y'' + ay' + by = (D^2 + aD + b)y = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y$$

と変形すれば，考えるべき方程式は

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = f(x)$$

である．ほとんど前節と同じように計算をするが，両辺に $e^{-\lambda_1 x}$ を掛けると，

$$e^{-\lambda_1 x}(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = e^{-\lambda_1 x} f(x)$$

となる．ここで公式 (4.11) を左辺に使うと，

$$D\{e^{-\lambda_1 x}(D - \lambda_2)y\} = e^{-\lambda_1 x} f(x)$$

となるので，両辺を積分すると，

$$e^{-\lambda_1 x}(D - \lambda_2)y = \int e^{-\lambda_1 x} f(x)dx$$

となる．

ここで左辺をみると，複素数 $\lambda = p + qi$ に対し，$\displaystyle\int e^{\lambda x} f(x)dx$ を具体的に計算するにはどう考えれば良いのかを考える必要がある．これは，オイラーの公式を使えば

$$\begin{aligned}
\int e^{\lambda x} f(x)dx &= \int e^{p+qix} f(x)dx \\
&= \int e^{px} e^{i(qx)} f(x)dx \\
&= \int e^{px}(\cos qx + i \sin qx) f(x)dx \\
&= \int e^{px} f(x) \cos qx dx + i \int e^{px} f(x) \sin qx dx
\end{aligned}$$

と，実部と虚部に分けて計算すれば良いことになる．

話を元に戻すと，得られた方程式の両辺に $e^{\lambda_1 x}$ を掛け算し，

$$(D - \lambda_2)y = e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x)dx$$

を得る．ここで，特殊解 $y_0(x)$ は，任意定数に何か具体的な値を入れればよく，0 を代入してももちろん差し支えないことに注意しよう．更にこの両辺に $e^{-\lambda_2 x}$ を掛けると，

$$e^{-\lambda_2 x}(D - \lambda_2)y = e^{-\lambda_2 x} e^{\lambda_1 x} \int e^{-\lambda_1 x} f(x)dx$$

となる．左辺に対して，公式 (4.11) を用いれば，

$$D(e^{-\lambda_2 x}y) = e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\int e^{-\lambda_1 x}f(x)dx$$

を得る．さらに両辺を積分すれば，

$$e^{-\lambda_2 x}y = \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\left(\int e^{-\lambda_1 x}f(x)dx\right)dx$$

を得る．最後に，両辺に $e^{\lambda_2 x}$ を掛ければ，特殊解 y_0 として，

$$y_0 = e^{\lambda_2 x}\left\{\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\left(\int e^{-\lambda_1 x}f(x)dx\right)dx\right\}$$

と得ることができる．あとは，同次 2 階定数係数線形微分方程式 $z''+az'+b=0$ の一般解 $z=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ を求めて足し合わせれば，微分方程式 (4.15) の一般解 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_0(x)$ を求めることができる．まとめると，次のようになる．

非同次 2 階定数係数線形微分方程式

非同次 2 階定数係数線形微分方程式 $y''+ay'+b=f(x)$ の一般解は，同次 2 階定数係数線形微分方程式 $z''+az'+b=0$ の一般解を $z=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ と表したとき，

$$y = C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+e^{\lambda_2 x}\left\{\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\left(\int e^{-\lambda_1 x}f(x)dx\right)dx\right\}$$

で与えられる．

例 16.

微分方程式 $y''-2y'-8y=x$ を解け．

まずは方程式 $y''-2y'-8y=x$ の解 $y_0(x)$ を一つ見つけ出すことから始めよう．左辺を微分作用素を用いて，

$$y''-2y'-8y=(D^2-2D+8)y=(D-4)(D+2)y$$

と変形すれば，考えるべき方程式は

$$(D-4)(D+2)y=x$$

である．ほとんど前節と同じように計算をするが，両辺に e^{-4x} を掛けると，

$$e^{-4x}(D-4)(D+2)y=e^{-4x}x$$

となる．ここで公式 (4.11) を左辺に使うと，

$$D\{e^{-4x}(D+2)y\}=xe^{-4x}$$

となるので，両辺を積分すると，

$$e^{-4x}(D+2)y=\int xe^{-4x}dx$$

となる．

　ここで左辺については，部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\int xe^{-4x}dx &= -\frac{1}{4}xe^{-4x}-\int (x)'\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)dx\\ &= -\frac{1}{4}xe^{-4x}+\int \frac{1}{4}e^{-4x}dx\\ &= -\frac{1}{4}xe^{-4x}-\frac{1}{16}e^{-4x}\end{aligned}$$

となる．なお，特殊解を求めればよいので，任意定数は 0 としている．

得られた方程式の両辺に e^{4x} を掛け算し，

$$(D+2)y = e^{4x}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right)$$

を得る．更にこの両辺に e^{2x} を掛けると，

$$e^{2x}(D+2)y = e^{2x}e^{4x}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right)$$

となる．左辺に対して，公式 (4.11) を用いれば，

$$D(e^{2x}y) = -e^{2x}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right)$$

を得る．さらに両辺を積分すれば，

$$e^{2x}y = -\int e^{2x}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right)dx$$

を得る．

ここで，左辺の不定積分については，任意定数を 0 として

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right)dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right)' dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right) - \int \frac{1}{8}e^{2x}dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\right) - \frac{1}{16}e^{2x} \\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\right)
\end{aligned}$$

と計算できる．

最後に，両辺に e^{-2x} を掛ければ，特殊解 y_0 として，

$$y_0 = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$$

と得ることができる．あとは，同次 2 階定数係数線形微分方程式 $z'' - 2z' - 8 = 0$ の一般解 $z = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x}$ を求めて足し合わせれば，微分方程式 (4.15) の一般解は

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$$

となる．

問 16. 非同次 2 階定数係数線形微分方程式

$$y'' + y' - 6y = e^{3x}$$

を解け．

例 17.

非同次 2 階定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{LC}I(t) = \omega\frac{V_0}{L}\cos\omega t \tag{4.16}$$

を解け．

計算がやや大変ではあるが，ここは気合を入れて頑張ることにする．見やすくするために，$I = y$，$t = x$ とおいて話を

進めよう．まず，左辺を微分作用素として表現すると，解くべき微分方程式は

$$\left(D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}\right)y=\omega\frac{V_0}{L}\cos\omega x \tag{4.17}$$

となる．左辺を因数分解するため，特性方程式 $\lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$ を解くと，解の公式より

$$\lambda=\frac{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-\frac{4L}{C}}}{2}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

を得る．そこで，この特性方程式の解を

$$\lambda_1=-\frac{R}{2L}+\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4}{LC}},\ \lambda_2=-\frac{R}{2L}-\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

とおく．確認ではあるが，解と係数の関係により，

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{R}{L},\ \lambda_1\lambda_2=\frac{1}{LC} \tag{4.18}$$

となるから，微分作用素を用いた表現

$$\left(D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}\right)y=(D^2-(\lambda_1+\lambda_2)D+\lambda_1\lambda_2)y=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y$$

が得られることを利用している．さて，因数分解された微分作用素を用いて表した式

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=\omega\frac{V_0}{L}\cos\omega x$$

対して，両辺に $e^{-\lambda_1 x}$ をかけて，(4.11) を用いると左辺は

$$e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_1)\{(D-\lambda_2)y\}=D\{e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_2)y\}$$

と変形できる．したがって，方程式 (4.6) は

$$D\{e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_2)y\}=\omega\frac{V_0}{L}e^{-\lambda_1 x}\cos\omega x$$

と変形された．この両辺を積分すれば，

$$e^{-\lambda_1 x}(D-\lambda_2)y=\omega\frac{V_0}{L}\int e^{-\lambda_1 x}\cos\omega x dx$$

を得る．この時右辺については，公式 (A.18) を用いれば

$$\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_1 x}}{(-\lambda_1)^2+\omega^2}(-\lambda_1\cos\omega x+\omega\sin\omega x)$$

となる．[*2] また，両辺に $e^{\lambda_1 x}$ を掛ければ，

$$(D-\lambda_2)y=\omega\frac{V_0}{L}\frac{1}{\lambda_1^2+\omega^2}(-\lambda_1\cos\omega x+\omega\sin\omega x)$$

を得る．この両辺に対し，さらに $e^{-\lambda_2 x}$ をかければ，

$$e^{-\lambda_2 x}(D-\lambda_2)y=\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1^2+\omega^2}(-\lambda_1\cos\omega x+\omega\sin\omega x)$$

[*2] 勘のするどい読者は，なぜここで三角関数の合成を使わないのか，と感じるであろう．ここで問題となるのは，λ_1 が複素数の可能性があるからである．もしこの議論を続行するとどうなるだろうか．この先は多少の準備が必要になるため，残念ながら割愛したい．

となる．そこで (4.11) を用いると，

$$D(e^{-\lambda_2 x}y) = \omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1^2+\omega^2}(-\lambda_1\cos\omega x + \omega\sin\omega x)$$

と変形される．そこで，再び両辺を積分すると，

$$e^{-\lambda_2 x}y = \omega\frac{V_0}{L}\frac{1}{\lambda_1^2+\omega^2}\left\{-\lambda_1\int e^{-\lambda_2 x}\cos\omega x dx + \omega\int e^{-\lambda_2 x}\sin\omega x dx\right\} \tag{4.19}$$

を得る．ここで公式 (A.18)，(A.19) を用いると，右辺については

$$\begin{aligned}
&\omega\frac{V_0}{L}\frac{1}{\lambda_1^2+\omega^2}\left\{-\lambda_1\frac{e^{-\lambda_2 x}}{(-\lambda_2)^2+\omega^2}(-\lambda_2\cos\omega x+\omega\sin\omega x)+\omega\frac{e^{-\lambda_2 x}}{(-\lambda_2)^2+\omega^2}(-\omega\cos\omega x-\lambda_2\sin\omega x)\right\}\\
&=\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1^2+\omega^2)(\lambda_2^2+\omega^2)}\left\{-\lambda_1(-\lambda_2\cos\omega x+\omega\sin\omega x)+\omega(-\omega\cos\omega x-\lambda_2\sin\omega x)\right\}\\
&=\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1\lambda_2)^2+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\omega^2+\omega^4}\left\{(\lambda_1\lambda_2-\omega^2)\cos\omega x-(\lambda_1+\lambda_2)\omega\sin\omega x\right\}\\
&=\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_1\lambda_2)^2+\{(\lambda_1+\lambda_2)^2-2\lambda_1\lambda_2\}\omega^2+\omega^4}\left\{(\lambda_1\lambda_2-\omega^2)\cos\omega x-(\lambda_1+\lambda_2)\omega\sin\omega x\right\}
\end{aligned}$$

ここで，解と係数の関係 (4.18) より，

$$\begin{aligned}
&\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{\left(\frac{1}{LC}\right)^2+\left\{\left(-\frac{R}{L}\right)^2-2\frac{1}{LC}\right\}\omega^2+\omega^4}\left\{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)\cos\omega x-\left(-\frac{R}{L}\right)\omega\sin\omega x\right\}\\
&=\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\omega^2\frac{R^2}{L^2}}\left\{\omega\frac{R}{L}\sin\omega x+\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)\cos\omega x\right\}\\
&=\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\omega^2\frac{R^2}{L^2}}}\sin(\omega x+\Phi)
\end{aligned}$$

ただし，

$$\cos\Phi=\frac{\omega\frac{R}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\omega^2\frac{R^2}{L^2}}},\quad \sin\Phi=\frac{\frac{1}{LC}-\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\omega^2\frac{R^2}{L^2}}}$$

であり，三角関数の相互関係から

$$\tan\Phi=\frac{\frac{1}{LC}-\omega^2}{\omega\frac{R}{L}}=\frac{\frac{1}{\omega C}-\omega L}{R}$$

である．また，

$$\omega\frac{V_0}{L}\frac{e^{-\lambda_2 x}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\omega^2\frac{R^2}{L^2}}}=\frac{V_0e^{-\lambda_2 x}}{\sqrt{\frac{L^2}{\omega^2}\left\{\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\omega^2\frac{R^2}{L^2}\right\}}}=\frac{V_0e^{-\lambda_2 x}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}$$

となるので，最終的に (4.19) の両辺に $e^{\lambda_2 x}$ をかけると，(4.17) の特殊解が

$$y=\frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\sin(\omega x+\Phi),\quad \tan\Phi=\frac{\frac{1}{\omega C}-\omega L}{R}$$

と求まった．さて，(4.17) の一般解はこの特殊解に同次 2 階定数係数線形微分方程式

$$\left(D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}\right)y=0 \tag{4.20}$$

の一般解を足せば得られる．これは，前節の同次 2 階定数係数線形微分方程式の議論から，次のように場合分けすればよい．

Case 1. $R^2-\dfrac{4L}{C}>0$，すなわち，λ_1，λ_2 が異なる 2 つの実数解である場合，(4.20) の一般解は任意定数 C_1，C_2 を用いて

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

と表せるので，$y=I$，$x=t$ と最初の設定に戻せば，(4.16) の一般解は

$$I(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\frac{V_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\sin(\omega t+\Phi)$$

となる．なお，この場合 λ_1，λ_2 については

$$\lambda_1=\frac{R}{2L}\sqrt{1-\frac{4L}{CR^2}}-\frac{R}{2L}<0,\ \lambda_2=-\frac{R}{2L}\sqrt{1-\frac{4L}{CR^2}}-\frac{R}{2L}<0$$

であるから，$e^{\lambda_1 t}\to 0$, $e^{\lambda_2 t}\to 0$ $(t\to\infty)$ となり，一般解の最初の 2 項については時間が十分経過すれば減衰することが分かる．

Case 2. $R^2-\dfrac{4L}{C}=0$，すなわち，$\lambda_1=\lambda_2$ となる重解である場合，(4.20) の一般解は任意定数 C_1，C_2 を用いて

$$y=\exp\left(-\frac{R}{2L}x\right)(C_1x+C_2)$$

と表せるので，$y=I$，$x=t$ と最初の設定に戻せば，(4.16) の一般解は

$$I(t)=\exp\left(-\frac{R}{2L}x\right)(C_1t+C_2)+\frac{V_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\sin(\omega t+\Phi)$$

なお，$t\exp\left(-\dfrac{R}{2L}x\right)\to 0$ $(t\to\infty)$ であるため，この場合でもやはり一般解の最初の 2 項については時間が十分経過すれば減衰することが分かる．

Case 3. $R^2-\dfrac{4L}{C}<0$，すなわち，λ_1，λ_2 は異なる 2 つの虚数解である場合を考える．λ_1，λ_2 が互いに共役な複素数であることから，(4.20) の一般解は任意定数 C_1，C_2 を用いて

$$y=C_1\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}x+C_2\exp\left(-\frac{R}{2L}x\right)\sin\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}x$$

と表されるので，$y=I$，$x=t$ と最初の設定に戻せば，(4.16) の一般解は

$$I(t)=\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\left(C_1\cos\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}t+C_2\sin\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}t\right)+\frac{V_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2}}\sin(\omega t+\Phi)$$

となる．なお，この場合も $\exp\left(-\dfrac{R}{2L}t\right)\to 0$ $(t\to\infty)$ であるため，いずれの場合でも一般解の最初の 2 項については時間が十分経過すれば減衰することが分かる．

付録 A

付録

A.1　不定積分

関数 $f(x)$ に対して，$F'(x) = f(x)$ を満たす $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．[*1]また，関数 $f(x)$ の原始関数をまとめて $\displaystyle\int f(x)dx$ と書き，$f(x)$ の**不定積分**という．[*2]

- 部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{A.1}$$

Proof. 積の微分法により

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

この両辺を x で積分すると，

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

移項して，

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

□

- 置換積分法
$x = \varphi(t)$ とおくとき，$\varphi(t)$ が微分可能で，導関数 $\varphi'(t)$ が連続であれば，

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{A.2}$$

Proof. $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$ とおく．$x = \varphi(t)$ に注意して，合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dt}F(x) = \frac{d}{dx}F(x) \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \frac{d}{dt}\varphi(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

この両辺を t で積分すると，

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{A.3}$$

□

[*1] 連続関数 $f(x)$ は原始関数 $F(x)$ を持つことが示されるが，この原始関数 $F(x)$ の構成に定積分が必要になるので，今は後回しにする．

[*2] 厳密には，不定積分の定義は定積分を用いて行う．この表記は，高校の教科書をそのまま抜粋したものである．

A.2 基本的な関数の不定積分

ここでは，定数 C を積分定数（任意定数とも言う）とする．

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \tag{A.4}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \tag{A.5}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{A.6}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1) \tag{A.7}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{A.8}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{A.9}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \tag{A.10}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C \tag{A.11}$$

(A.4) から (A.11) は証明を省略する．[*3]

$$\int \log|x|\,dx = x\log|x| - x + C \tag{A.12}$$

Proof. 部分積分法により，

$$\int (x)' \log|x|\,dx = x\log|x| - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log|x| - x$$

□

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C \tag{A.13}$$

Proof.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$

である．ここで，

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

であったので，

$$\int -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C$$

□

[*3] 各自確かめよ．(両辺を x で微分すればよい．)

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \tag{A.14}$$

Proof. 被積分関数について

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$$

この右辺を部分分数分解すると，

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$

となる．従って，

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx &= \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2a}\left(\log|x-a| - \log|x+a|\right) + C = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C
\end{aligned}$$

□

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \tag{A.15}$$

Proof.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}+1}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

従って，

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$$

□

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C \tag{A.16}$$

Proof. 部分積分法により，

$$\begin{aligned}
\int (x)'\sqrt{x^2+a}\,dx &= x\sqrt{x^2+a} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+a} - \int \left(\sqrt{x^2+a} - \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)\,dx
\end{aligned}$$

従って，以下のように式変形したことになる．

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

ここで，右辺の $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$ を左辺に移項し，(A.15) を用いると，

$$2\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$

となり，両辺に $\dfrac{1}{2}$ をかけることで，

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right) + C$$

を得る． □

特に，交流回路を微分方程式を用いて勉強するうえで，以下の不定積分を求めるテクニックも重要である．まずは，多項式と指数関数の積で表される関数の不定積分を求めよう．

$$\int e^{ax}P(x)dx = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a^{k+1}}P^{(k)}(x)\right)e^{ax} + C \tag{A.17}$$

ただし，$P(x)$ は n 次の整式であり，$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ を満たすものとする．

Proof. 部分積分法を繰り返し用いることにより，

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}P(x)dx &= \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' P(x)dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}P(x) - \int \left(\frac{1}{a^2}e^{ax}\right)' P'(x)dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}P(x) - \left\{\frac{1}{a^2}e^{ax}P'(x) - \int \left(\frac{1}{a^3}e^{ax}\right)' P''(x)dx\right\} \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}P(x) - \frac{1}{a^2}e^{ax}P'(x) + \left\{\frac{1}{a^3}e^{ax}P''(x) - \int \left(\frac{1}{a^4}e^{ax}\right)' P'''(x)dx\right\} \\
&= \cdots = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a^{k+1}}P^{(k)}(x)\right)e^{ax} + C
\end{aligned}$$

なお，$P^{(n)}(x) = a_0n!$ は x に無関係な定数であるから，$\dfrac{(-1)^k}{a^{k+1}}P^{(k)}(x)e^{ax} = 0$ $(k > n)$ であることに気を付けよう． □

また，三角関数と指数関数の積で与えられる関数の不定積分についても，次のように計算することが可能である．

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \tag{A.18}$$

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) + C \tag{A.19}$$

ただし，$a^2 + b^2 \neq 0$ とする．

Proof. $a \neq 0$ と仮定しよう．

$$I = \int e^{ax}\cos bx dx,\ J = \int e^{ax}\sin bx dx$$

とおく．このとき，部分積分法により，

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \cos bx dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \int \frac{1}{a}e^{ax}\{-b\sin bx\}dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}J
\end{aligned}$$

および，

$$\begin{aligned}
J &= \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \sin bx dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \int \frac{1}{a}e^{ax} b\cos bx dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I
\end{aligned}$$

となる．したがって，次のような連立方程式が立てられたことになる．

$$\begin{cases} aI = e^{ax}\cos bx + bJ \\ aJ = e^{ax}\sin bx - bI \end{cases}$$

これを，I，J について解くと，

$$\begin{cases} I = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) \\ J = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) \end{cases}$$

を得る． □

なお，(A.18)，(A.19) の右辺は，交流回路の微分方程式を解く際には次のように変形しておくとよい．a，b を任意の実数とする．加法定理より，次の三角関数の合成が成立する．

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\phi)$$

ただし，ϕ は，

$$\begin{cases} \cos\phi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\phi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

を満たす角である．なお，電気回路では，この ϕ を表現する際に，

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{b}{a}$$

のような表記も多々使われる．ただし，$\tan\phi$ はその性質上周期が π となり，表現できる位相のずれが $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ となることに注意しよう．これにより，(A.18) の右辺は，

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{b\sin bx + a\cos bx\} &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\sqrt{b^2+a^2}\sin(bx+\phi) \\
&= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+\phi)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\cos\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\phi = \frac{a}{b}$ である．なお，関数 $y = \tan\phi$ の定義域を $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ と限定することにより，$\tan^{-1}(\tan\phi) = \phi$ を満たす逆三角関数 $\tan^{-1} y$ が存在する．この逆三角関数 $\tan^{-1} y$ の定義域は実数全体，値域は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ となる．この $\tan^{-1} y$ もまた，位相差を表すのに電気回路ではよく用いられる．(A.19) の右辺も同様に式変形すると，

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\{a\sin bx - b\cos bx\} &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+(-b)^2}\sin(bx+\phi) \\
&= \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+\phi)
\end{aligned}$$

となる．ただし，$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\phi = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\tan\phi = -\frac{b}{a}$ である．

ところで，この積分 (A.18)，および (A.19) は，a が複素数 λ であるときにも成り立つ．$\lambda \neq 0$ と仮定する．証明は，a が実数の時と全く同じである．

$$I = \int e^{\lambda x} \cos bx dx,\ J = \int e^{\lambda x} \sin bx dx$$

とおく．指数関数の微分の公式 (4.13) より，部分積分法により，

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}\right)' \cos bx dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \cos bx - \int \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \{-b \sin bx\} dx \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{\lambda} \int e^{\lambda x} \sin bx dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \cos bx + \frac{b}{\lambda} J \end{aligned}$$

および，

$$\begin{aligned} J &= \int \left(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}\right)' \sin bx dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \sin bx - \int \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} b \cos bx dx \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \sin bx - \frac{b}{\lambda} \int e^{\lambda x} \cos bx dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \sin bx - \frac{b}{\lambda} I \end{aligned}$$

となる．したがって，次のような連立方程式が立てられたことになる．

$$\begin{cases} \lambda I = e^{\lambda x} \cos bx + bJ \\ \lambda J = e^{\lambda x} \sin bx - bI \end{cases}$$

これを，I，J について解くと，

$$\begin{cases} I = \displaystyle\int e^{\lambda x} \cos bx dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + b^2} (\lambda \cos bx + b \sin bx) \\ J = \displaystyle\int e^{\lambda x} \sin bx dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + b^2} (-b \cos bx + \lambda \sin bx) \end{cases}$$

を得る．これによって，RLC 交流回路を一般的に解く際にも実数の時と全く同じように公式 (A.18)，および (A.19) を用いてよいことが明らかになった．

A.3　問題の解答

問 1. $y' = \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ より，$y = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$.

問 2. 関数 $y = e^x$ の導関数は $y' = e^x$ である．このとき，C を任意定数として，曲線 $y = e^x$ 上の点 $(C,\ e^C)$ で接する接線の方程式は，$y - e^C = e^C(x - C)$ で与えられる．この方程式の両辺を x で微分すると，$y' = e^C$ であり，$C = \log y'$ と表せる．これらを再び接線の方程式に代入すれば，$y - y\prime = xy'(x - \log y')$．ゆえに，整理して微分方程式 $y - (1 + x)y' + y\prime \log y' = 0$ を得る．

問 3. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$, $y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$ より，$y'' + y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - C_1 \cos x - C_2 \sin x = 0$．従って，$y$ は微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解である．また，$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1$，$y'(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2$．初期条件より，$C_1 = y(0) = \sqrt{3}$，　$C_2 = y'(0) = 1$．以上から，初期値問題の解は $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$.

問 4. 変数分離形であるから，$y \neq 0$ と仮定して $\frac{1}{y} \cdot y' = -3$．両辺を x で積分すると，$\int \frac{1}{y} y' dx = \int -3 dx$．左辺を $y = y(x)$ と置換すれば，$\int \frac{1}{y} dy = \int -3 dx$ を得る．従って，両辺を積分すれば，C を任意定数として $\log |y| = -3x + C$ となる．右辺について $-3x + C = \log e^{-3x+C} = \log(e^{-3x} e^C)$ と変形すれば，$\log |y| = \log(e^{-3x} e^C)$．$\log M = \log N \iff M = N$ より，$|y| = e^C e^{-3x}$．絶対値を取れば，$y = \pm e^C e^{-3x}$ となる．従って，任意定数を $A = \pm e^C$ と取り直せば，一般解 $y = Ae^{-3x}$ を得る．なお，$y \equiv 0$ も解である．以上で，微分方程式 $y' = -3y$ が解けた．

問 5. $a = 0$ のとき，$y' = 0$ であるから，C を任意定数として $y = C$ が解となる．$a \neq 0$ のとき，変数分離形であるから，$y \neq 0$ と仮定して $\frac{1}{y} \cdot y' = a$．両辺を x で積分すると，$\int \frac{1}{y} y' dx = \int a dx$．左辺を $y = y(x)$ と置換すれば，$\int \frac{1}{y} dy = \int a dx$ を得る．従って，両辺を積分すれば，C を任意定数として $\log |y| = ax + C$ となる．右辺につ

いて $ax+C=\log e^{ax+C}=\log(e^{ax}e^{C})$ と変形すれば，$\log|y|=\log(e^{ax}e^{C})$．$\log M=\log N \iff M=N$ より，$|y|=e^{C}e^{ax}$．絶対値を取れば，$y=\pm e^{C}e^{ax}$ となる．従って，任意定数を $C_0=\pm e^{C}$ と取り直せば，一般解 $y=C_0e^{ax}$ を得る．なお，$y\equiv 0$ も解である．以上で，微分方程式 $y'=ay$ が解けた．

問 6. 変数分離形の微分方程式であるから，$\frac{1}{\tan y}y'=\sin x$ である．両辺を x で積分すると，$\int\frac{1}{\tan y}y'dx=\int\sin xdx$．左辺を $y=y(x)$ と置換すれば，$\int\frac{1}{\tan y}dy=\int\sin xdx$ を得る．従って，両辺を積分すれば，左辺は $\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin y|$ となるので，C を任意定数として $\log|\sin y|=-\cos x+C$ となる．右辺について $-\cos x+C=\log e^{-\cos x+C}=\log(e^{-3x}e^{C})$ と変形すれば，$\log|\sin y|=\log(e^{-\sin x}e^{C})$．$\log M=\log N\iff M=N$ より，$|\sin y|=e^{C}e^{-\cos x}$．絶対値を取れば，$\sin y=\pm e^{C}e^{-\cos x}$ となる．従って，任意定数を $A=\pm e^{C}$ と取り直せば，一般解 $\sin y=Ae^{-\cos x}$ を得る．

問 7. 変数分離形であるから，$I(t)\neq 0$ と仮定して $\frac{1}{I(t)}\cdot I'(t)=-\frac{1}{RC}$．両辺を t で積分すると，$\int\frac{1}{I(t)}I'(t)dt=\int\left(-\frac{1}{RC}\right)dt$．左辺を $I=I(t)$ と置換すれば，$\int\frac{1}{I}dI=\int\left(-\frac{1}{RC}\right)dt$ を得る．従って, 両辺を積分すれば, C_0 を任意定数として $\log|I(t)|=-\frac{1}{RC}t+C_0$ となる．右辺について $-\frac{1}{RC}t+C_0=\log\exp\left(-\frac{1}{RC}t+C_0\right)=\log\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)e^{C_0}$ と変形すれば, $\log|I(t)|=\log(\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)e^{C_0})$．$\log M=\log N\iff M=N$ より, $|I(t)|=e^{C_0}\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$．絶対値を取れば, $I(t)=\pm e^{C_0}\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$ となる．従って, 任意定数を $A=\pm e^{C_0}$ と取り直せば, 一般解 $I(t)=A\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$ を得る．更に，$I(0)=Ae^0=A$ より，初期条件から $A=I(0)=2$．よって，初期値問題の解は $I(t)=2\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$ である．

問 8. 始めに，同次方程式 $y'+\frac{y}{x}=0$ を解くと，これは変数分離形なので $\int\frac{1}{y}dy=\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx$．両辺を積分すると，$C$ を任意定数として $\log|y|=\log|x|+C$ を得る．従って，$\log|y|+\log|x|=\log|yx|=C$ より，$|yx|=e^{C}$ となるので，絶対値記号を外すと $yx=\pm e^{C}$ となる．任意定数を $A=\pm e^{C}$ と取り直せば，$y=A\frac{1}{x}$ を得る．この任意定数 A を，x の関数 $z(x)$ に置きなおして，$y=z(x)\frac{1}{x}$ とおく．(注：この手続きを定数変化法といったのである．) すると，$y'=z'\frac{1}{x}-z\frac{1}{x^2}$ となる．これらを元の方程式 $y'+\frac{1}{x}y=x^3$ に代入すれば，$z'\frac{1}{x}-z\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot z\frac{1}{x}=x^3$，すなわち $z'=x^4$ となる．従って, 任意定数を C とすると，$z=\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5+C$ であるから, $y=z\frac{1}{x}$ に代入して, $y=\left(\frac{1}{5}x^5+C\right)\frac{1}{x}$, ゆえに一般解 $y=\frac{1}{5}x^4+\frac{C}{x}$ を得る．

問 9. 始めに，同次方程式 $y'+\frac{1}{RC}y=0$ を解く．これは**問 7.** と同様にして，一般解 $I(t)=A\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$ を得る．この任意定数 A を x の関数 $z(x)$ に置きなおして，$y=z(x)\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$ とおく．すると，$y'=z'\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)-\frac{1}{RC}z\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$ となる．これらを元の方程式 $y'+\frac{1}{RC}y=\omega\frac{V_0}{R}\cos\omega t$ に代入すれば，$z'\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)-\frac{1}{RC}z\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)+\frac{1}{RC}\cdot z\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)=\omega\frac{V_0}{R}\cos\omega t$，整理して $z'\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)=\omega\frac{V_0}{R}\cos\omega t$，すなわち $z'=\exp\left(\frac{1}{RC}t\right)\omega\frac{V_0}{R}\cos\omega t$ となる．従って，任意定数を C_0 として積分をすると，$z=\omega\frac{V_0}{R}\int\exp\left(\frac{1}{RC}t\right)\cos\omega tdx$ となる．右辺をさらに計算すれば，$z=\omega\dfrac{V_0}{R}\left\{\dfrac{\exp\left(\frac{1}{RC}t\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2+\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)+C_0\right\}$ である．(なお，この詳細な計算過程は公式 (A.18) を参照してほしい．) ここで，ϕ は，$\cos\phi=\frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2+\omega^2}}$，$\sin\phi=\frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2+\omega^2}}$ を満たす．よって，$y=z\exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)$ に代入すると，$y=\exp\left(-\dfrac{1}{RC}t\right)\omega\dfrac{V_0}{R}\left\{\dfrac{\exp\left(\frac{1}{RC}t\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2+\omega^2}}\sin(\omega t+\phi)+C_0\right\}$．展開すれば, 一般解 $y=\dfrac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}\sin(\omega t+\phi)+C_0\omega\dfrac{V_0}{R}\exp\left(-\dfrac{1}{RC}t\right)$ を得る．なお，位相差 ϕ は，$\tan\phi=\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}=\dfrac{\frac{1}{RC}}{\omega}=\dfrac{1}{\omega RC}$．よって，$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$．

問 10. $(D^2+3D-18)y=0$

問 11. $y''+5y'+4y=0$

問 12. $\left(D-\frac{3+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(D-\frac{3-\sqrt{7}i}{2}\right)y=(D^2-3D+4)y$ より，$y''-3y'+4y=0$.

問 13. $(D^2-5D+6)y=(D-2)(D-3)y$ より，微分方程式 $(D-2)(D-3)y=0$ を解けばよい．ここで両辺に e^{-2x} を掛けて公式 (4.11) を用いると，左辺は $e^{-2x}(D-2)\{(D-3)y\}=D\{e^{-2x}(D-3)y\}$ と変形できるので，方程式は $D\{e^{-2x}(D-3)y\}=0$ となる．従って，両辺を積分すれば，任意定数を複素数 C_1 とおくと $e^{-2x}(D-3)y=C_1$ 従って，$(D-3)y=C_1e^{2x}$ を得る．この両辺に e^{-3x} を掛けると，$e^{-3x}(D-3)y=e^{-3x}C_1e^{2x}=C_1e^{-x}$ となり，再

び左辺に公式 (4.11) を用いると，$D(e^{-3x}y) = C_1e^{-x}$ を得る．したがって，両辺を積分すると，任意定数を複素数 C_2 とおけば，$e^{-3x}y = \int C_1e^{-x}dx = -C_1e^{-x} + C_2$ それゆえ，両辺に e^{3x} をかけて，任意定数 C_1 を取り直すことにより，一般解 $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ を得る．

問 14. $(D^2 - 6D + 9)y = (D-3)(D-3)y$ より，微分方程式 $(D-3)(D-3)y = 0$ を解けばよい．このとき，$(D-3)(D-3)y = 0$ の両辺に e^{-3x} をかけて，(4.11) を用いると $e^x(D-3)\{(D-3)y\} = D\{e^{-3x}(D-3)y\}$ したがって，方程式 $(D-3)(D-3)y = 0$ は $D\{e^{-3x}(D-3)y\} = 0$ と変形された．この両辺を積分すれば，複素数 C_1 を任意定数として，$e^x(D-3)y = C_1$ を得る．両辺に e^{3x} を掛ければ，$(D-3)y = C_1e^{3x}$ となる．この両辺に対し，さらに e^{-3x} をかければ，$e^{-3x}(D-3)y = e^{-3x}C_1e^{3x}$ となる．ここで，左辺は $e^{-3x}C_1e^{3x} = e^{(3-3)x}C_1 = C_1$ になることに注意しよう．そこで (4.11) を用いると，$D(e^{-3x}y) = C_1$ と変形される．そこで，再び両辺を積分すると，$e^{-3x}y = \int C_1dx$ を得る．右辺については，複素数 C_2 を任意定数として $\int C_1dx = C_1x + C_2$ であるから，$e^{-3x}y = C_1x + C_2$ となる．したがって，両辺に e^{3x} を掛けることにより，一般解 $y = e^{3x}(C_1x + C_2)$ を得る．

問 15. 特性方程式 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ を解くと，$\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ となる．$\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$，$\overline{\alpha} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ と置くと，解くべき微分方程式は $(D-\alpha)(D-\overline{\alpha})y = 0$ となる．ここで両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けて公式 (4.11) を用いると，左辺は $e^{-\alpha x}(D-\alpha)\{(D-\overline{\alpha})y\} = D\{e^{-\alpha x}(D-\overline{\alpha})y\}$ と変形できるので，方程式は $D\{e^{-\alpha x}(D-\overline{\alpha})y\} = 0$ となる．従って，両辺を積分すれば，任意定数を複素数 C_1 とおくと $e^{-\alpha x}(D-\overline{\alpha})y = C_1$ 従って，$(D-\overline{\alpha})y = C_1e^{\alpha x}$ を得る．この両辺に $e^{-\overline{\alpha}x}$ を掛けると，$e^{-\overline{\alpha}x}(D-\overline{\alpha})y = e^{-\overline{\alpha}}C_1e^{\alpha x} = C_1e^{(\alpha-\overline{\alpha})x}$ となり，再び左辺に公式 (4.11) を用いると，$D(e^{-\overline{\alpha}x}y) = C_1e^{(\alpha-\overline{\alpha})x}$ を得る．したがって，両辺を積分すると，任意定数を複素数 C_2 とおけば，$e^{-\overline{\alpha}x}y = \int C_1e^{(\alpha-\overline{\alpha})x}dx = \frac{C_1e^{(\alpha-\overline{\alpha})x}}{\alpha-\overline{\alpha}} + C_2$ それゆえ，両辺に $e^{\overline{\alpha}x}$ をかけて，任意定数 C_1 を取り直すことにより，一般解 $y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\overline{\alpha}x}$ を得る．ここで，オイラーの公式を用いると，$e^{\alpha x} = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$，$e^{\overline{\alpha}x} = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ となるので，$y = C_1e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ となる．これを再び整理すると，$y = (C_1 + C_2)e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + i(C_1 - C_2)e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ となり，再び $C_1 + C_2$，$i(C_1 - C_2)$ を任意定数 C_1，C_2 で取り直せば，$y = C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ を得る．

問 16. まずは方程式 $y'' + y' - 6y = e^{3x}$ の解 $y_0(x)$ を一つ見つけ出すことから始めよう．左辺を微分作用素を用いて，$y'' + y' - 6y = (D^2 + D - 6)y = (D+3)(D-2)y$ と変形すれば，考えるべき方程式は $(D+3)(D-2)y = e^{3x}$ である．両辺に e^{3x} を掛けると，$e^{3x}(D+3)(D-2)y = e^{3x}e^{3x}$ となる．ここで公式 (4.11) を左辺に使うと，$D\{e^{3x}(D-2)y\} = e^{6x}$ となるので，両辺を積分すると，$e^{3x}(D-2)y = \int e^{6x}dx = \frac{1}{6}e^{6x}$ となる．なお，特殊解を求めればよいので，任意定数は 0 としている．得られた方程式の両辺に e^{-3x} を掛け算し，$(D-2)y = e^{-3x}\frac{1}{6}e^{6x} = \frac{1}{6}e^{3x}$ を得る．更にこの両辺に e^{2x} を掛けると，$e^{-2x}(D-2)y = e^{-2x}\frac{1}{6}e^{3x} = \frac{1}{6}e^{x}$ となる．左辺に対して，公式 (4.11) を用いれば，$D(e^{-2x}y) = \frac{1}{6}e^x$ を得る．さらに両辺を積分すれば，$e^{-2x}y = \int \frac{1}{6}e^xdx = \frac{1}{6}e^x$ を得る．最後に，両辺に e^{2x} を掛ければ，特殊解 y_0 として，$y_0 = \frac{1}{6}e^{3x}$ と得ることができる．あとは，同次 2 階定数係数線形微分方程式 $z'' + z' - 6 = 0$ の一般解 $z = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$ を求めて足し合わせれば，微分方程式 (4.15) の一般解は $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-2x} + \frac{1}{6}e^{3x}$ となる．

参考文献

[1] 柳田英二，栄伸一郎「常微分方程式論」，朝倉書店 (2002)

[2] 國友正和，他 10 名「改訂版　物理」，数研出版株式会社 (2018)

[3] 砂川重信「理論電磁気学 第 3 版」，紀伊國屋書店 (1999)