

# Coffee Break No.1

Kentaro Nagahara

集合  $X$  の任意の二つの元  $x, y$  の組に対して、実数  $d(x, y)$  が対応して、距離の公理と呼ばれる次の公理

- (D1)  $d(x, y) \geq 0, x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0,$
- (D2)  $d(x, y) = d(y, x),$
- (D3) 集合  $X$  の任意の元  $z$  に対して、 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

が成立するとき、 $d$  を  $X$  上の距離という。また、 $X$  と  $d$  の組  $(X, d)$  を距離空間という。一般に、空間と呼ばれる集合の元を点という。また、距離空間  $(X, d)$  が与えられたとき、集合  $X$  の元の列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  を  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  と略記して、 $X$  の点列という。

距離空間について、収束の概念を導入することができる。点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  とは独立に  $X$  の点  $\alpha$  が与えられたとしよう。各  $n \geq 1$  に対して、 $d(a_1, \alpha), d(a_2, \alpha), \dots, d(a_n, \alpha), \dots$  は実数列であるから、高校で扱える射程範囲内である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, \alpha) = 0 \quad (1)$$

のとき、点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  は  $\alpha$  に収束する、または、点  $\alpha$  は点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  の極限であるという。距離空間  $(X, d)$  の点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  は  $X$  のある点  $\alpha$  に収束するとき、収束列という。ここで、距離空間の代表例を挙げよう。実数全体 ( $\mathbb{R}$  と書く) は、もっとも基本的な距離空間であり、距離  $d$  は  $d(x, y) = |y - x|$  がよく用いられる。(問:  $d$  が距離の公理を満たすことを確かめよ。)さて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

は、教科書ではごく当然成り立つものとして扱っている。 $n$  が限りなく大きくなれば、 $1/n$  は 0 に収束する。これは感覚的には、ごく当たり前で、結論を言うと正しい。しかし、それを数式でより厳密に定義する  $\varepsilon - N$  論法というものがある。

**定義 1** (点列の収束の定義). 点列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $\alpha$  に収束するとは、「任意の正数  $\varepsilon > 0$  に対して、ある自然数  $N = N(\varepsilon)$  が存在して、 $n \geq N$  なる全ての自然数  $n$  について  $d(a_n, \alpha) < \varepsilon$  が成り立つ」ことをいう。

これを用いて、数列  $1/n$  が  $n$  を無限大にすると 0 に収束することを厳密に示してみよう。(数列を点列と呼んでもよいが、実数は数なのでこう呼ぶのが普通である)

任意の正数  $\varepsilon > 0$  を取り、固定する。この  $\varepsilon$  に対して、 $1/\varepsilon < N$  となる自然数  $N$  が存在する。(このような自然数  $N$  が存在することを保証するのが、アルキメデスの原理である。今は紹介に留める。) このとき、 $n \geq N$  なる全ての自然数  $n$  について

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad (2)$$

が成り立つ。定義 1 と (2) より、 $a_n = 1/n$  によって定義される数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は 0 に収束する。

本来は、このようにして数列の収束は定義されるのである。(大学の数学で、多くの学生が突然面食らう定義でもある。こういうのが好きなら、数学科に進むのもよい。逆に、こういうのはイヤで、計算をゴリゴリしたいという人は、物理や情報の分野に進むことを強くお勧めする。)

**注意 1.** 著者はコーヒー (ブラック) が大好きである。手軽に入手できる缶コーヒーに限定すれば、タリーズコーヒーが私のお勧めだ。おいしいコーヒー (ブラック) を見つけたら、教えて欲しい。

## Coffee Break No.2

Kentaro Nagahara

$(X, d)$  を距離空間,  $X$  の点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を収束列とする. このとき, No.1 の点列の収束の定義から, 任意の正数  $\varepsilon$  に対して, ある  $N$  が存在して,  $n \geq N, m \geq N$  を満たす全ての自然数  $n, m$  に対して,

$$0 \leq d(a_n, a_m) \leq d(a_n, \alpha) + d(a_m, \alpha) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

とできる. (距離の公理 D1, D2, D3 をすべて用いている.)  $\varepsilon$  が任意に取れるので,  $2\varepsilon$  もいくらでも小さくでき,  $d(a_n, a_m)$  は限りなく小さくなる. したがって,

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(a_n, a_m) = 0 \quad (3)$$

が成り立つ. 一般に, 距離空間  $(X, d)$  の点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  は, (3) を満たすとき, コーシー列という. より厳密には,

**定義 2** (コーシー (Cauchy) 列). 任意の正数  $\varepsilon > 0$  に対して, ある自然数  $N = N(\varepsilon)$  が存在して,  $n \geq N, m \geq N$  なる全ての自然数  $n, m$  について  $d(a_n, a_m) < \varepsilon$  が成り立つ点列を, コーシー列という.

点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  がコーシー列であるという条件 (3) は, 点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  しか用いておらず, 距離  $d(a_n, a_m)$  を求めて,  $m, n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束することを試してみればよい. これに反して, 収束列であるという条件 (1) は, 極限  $\alpha$  を見つけるという「閃き」を要する. 条件 (3) には, 閃きは必要ではなく, ただ機械のように計算の努力をすればよい. このように, コーシー列と収束列の間には, 理論上も, 実際の運用にも, 格段の差異がある. したがって, 両者が一致するような空間はありがたい.

コーシー列が常に収束列であるような距離空間  $(X, d)$  を, 完備という. 先ほど見たように, 距離空間  $(X, d)$  の点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  が収束列ならば, コーシー列であるが, 一般には,  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  がコーシー列であっても, 収束列になるとは限らないのである.

たとえば, 実数全体  $\mathbb{R}$  は完備な距離空間であるが, 有理数全体 ( $\mathbb{Q}$  と書く) は, 距離空間ではあるが, 完備ではない. (問:  $\mathbb{Q}$  の任意の 2 元  $x, y$  に対して, 距離  $d$  を  $d(x, y) = |y - x|$  とおくと, 有理数全体  $\mathbb{Q}$  は距離空間であることを証明せよ.) これはなぜだろうか. 要するに, 有理数全体  $\mathbb{Q}$  の元からなる数列で, 有理数に収束しないものを考えればよい. (問: このような, 有理数からなる数列で, コーシー列ではあるが収束列ではない数列を構成せよ.)

この先は余談になるが, 完備のことを, 英語では complete, 仏語では complet, 独語では vollständig という. これを, 岩波の数学辞典や, 日本数学会では, 「完備」と訳しているが, これは実際に起きている現象とは感覚が一致しない. 事実, 仏語の「complet」とは, 日本語で訳すと「満員」のことで, ホテルが設備完備であるという「完備」の意味ではない. 完備な距離空間は, むしろそれ以上元が入る余地がない, 満員状態の空間であることを示している.

このことを有理数全体  $\mathbb{Q}$  と実数全体  $\mathbb{R}$  に置き換えて考えれば,  $\sqrt{2}$  は  $\mathbb{Q}$  には含まれないが,  $\mathbb{R}$  には含まれる. 事実, 実数全体  $\mathbb{R}$  は, これ以上数が入る隙間がないほど, 数が詰め込まれている状況になっていることが証明できる. これが, 実数と数直線が対応することや, 実数の連続性への, 理論的な保証を与えている.

**注意 2.** なお, この辺の話は, わからなくても死にはしない. むしろ, きわめて健康的な生活が送れるだろう.

## Coffee Break No.3

Kentaro Nagahara

実数の性質を論じるとき、高校の教科書のような、直感的な議論もよいが、わざわざ難しくして、数学的な議論をするのも一興であろう。我々は数を議論するうえで、公理と呼ばれる命題が必要となる。公理と聞くと、「諸君は生徒に、公理だから証明はできないけれども、万人が認める命題ですね、と優しく教えられる先生になりましょうね。」と、私がまだ数学の右も左もわからない時代に九州大学の先生が教えてくれたことを思い出す。実数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  は、正数  $M$  があって、 $a_n \leq M$  ( $n \geq 1$ ) が成立するとき、上に有界といい、 $a_n \leq a_{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) のとき、単調非減少、 $a_n \leq a_{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) のとき単調増加であるという。このとき、次の公理が成立する。(と、約束することにする。そういう命題を公理と呼ぶ。)

**公理 1** (実数の連続性公理). 上に有界な単調非減少数列は収束する。

これを用いて、アルキメデスの原理

**命題 1** (アルキメデスの原理). 任意の正数  $a$ ,  $\varepsilon$  に対して、自然数  $n_0$  が存在して、 $n_0\varepsilon > a$ .

を証明しよう。ある正数  $a$  と  $\varepsilon$  に対して、公理 1 が成立しなかったとする。すると、任意の自然数  $n$  に対して、 $n\varepsilon \leq a$  が成立するから、実数列  $\{n\varepsilon\}_{n \geq 1}$  は上に有界である。これは単調増加な数列であるから、実数の連続性公理より収束する。その極限を  $x_0$  とする。 $n\varepsilon \leq a$  ( $n \geq 1$ ) であるから、 $x_0 \leq a$ 。一方、実数列  $\{n\varepsilon\}$  は実数  $x_0$  に限りなく近づくから、点列の収束の定義により、十分大きな番号  $n_0$  を取れば、 $n_0$  番目から先では、 $x_0$  との差が  $\varepsilon$  より小さくなり、 $x_0 - \varepsilon < n\varepsilon < x_0 + \varepsilon$  ( $n \geq n_0$ ) が成立する。左辺より、 $x_0 < (n+1)\varepsilon$  が得られる。一方、単調増加数列  $\{n\varepsilon\}_{n \geq 1}$  の極限  $x_0$  は、仮定より任意の自然数  $n$  に対して  $n\varepsilon \leq x_0$  を満たすので、 $x_0 < (n+1)\varepsilon \leq x_0$  が成立し、矛盾である。このように背理法で、命題 1 が示された。

公理 1 からすぐに導かれる公式を紹介する。 $0 < a < 1$  に対して、 $\delta = \frac{1}{a} - 1 > 0$  とおくと、二項定理より

$$a^{-n} = (1 + \delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n > n\delta$$

であるから、 $a^n < \frac{1}{n\delta}$ 。一方、公理 1 より、任意の  $\varepsilon$  に対して、 $n_0\varepsilon > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \frac{1}{n\delta} < \varepsilon$  ( $n \geq n_0$ ) となる  $n_0$  が存在するから、 $a^n < \frac{1}{n\delta} < \varepsilon$  ( $n \geq n_0$ )、すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad (0 < a < 1). \quad (4)$$

一般に距離空間  $(X, d)$  の部分集合  $Y$  は、 $X$  の任意の点  $x$  が、 $Y$  に属する  $X$  の点列  $\{y_n\}_{n \geq 1}$  の極限となるとき、 $X$  の稠密部分集合という。数直線  $(\mathbb{R}, d)$  において、有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  が稠密であることを証明しよう。そのために、次の基本的な命題を用意する。

**命題 2.** 任意の無理数  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  に対して、実数  $a_n$  ( $n$  は正整数) を、 $\frac{m}{10^n}$  ( $m$  は正整数) の形の分数で、 $\alpha$  より小さいものの最大数とする。このとき、有理数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  はコーシー列となる。

この命題の証明は次回に譲るが、興味のある人は考えてみてほしい。(ヒント:  $\alpha$  を  $\sqrt{2}$  と置き換えてみると、 $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1.4$ ,  $a_3 = 1.41$ ,  $a_4 = 1.414$ ,  $\cdots$  となる。)

## Coffee Break No.4

Kentaro Nagahara

命題 2 の証明を始めよう．自然数全体の集合を  $\mathbb{N}$  と書く． $\mathbb{N}$  に対して，次の公理を仮定する．

**公理 2** (ペアノの公理).  $\mathbb{N}$  の空でない任意の部分集合は，最小元を持つ．

実数  $x$  に対して， $[x]$  は， $x$  の整数部分とする．つまり， $[x] \leq x < [x] + 1$ ．自然数  $n$  に対して，自然数の部分集合  $S_n = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{10^n} > \alpha\}$  は， $([ \alpha ] + 1) \cdot 10^n$  を含むので，空ではない．したがって，公理 2 により，最小限をもつ．これを  $p_n + 1$  と書くと， $p_n \notin S_n$  であるから， $\frac{p_n}{10^n} \leq \alpha < \frac{p_n + 1}{10^n}$ ．すなわち，命題の  $a_n$  は  $a_n = \frac{p_n}{10^n}$  と書けることを意味する． $\nu > n$  のとき， $a_n = \frac{10^{\nu-n} p_n}{10^\nu}$  とかけるので，そのような有理数の中で最大のものである  $a_\nu$  を越えない．したがって， $a_\nu \leq a_n$  ( $\nu > n$ )．これより，

$$0 \leq a_\nu - a_n \leq \alpha - a_n < \frac{1}{10^n} \quad (\nu > n) \quad (5)$$

を得る．アルキメデスの原理より導かれる公式の (4) より， $d(a_\nu, a_n) = |a_\nu - a_n| \rightarrow 0$  ( $\nu > n \rightarrow \infty$ ) が成立し，実数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  はコーシー列である．その上，(4) と (5) より  $\alpha$  に収束するが， $\alpha \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  より，有理数列  $\{a_n\}$  はその収束先が有理数ではない．したがって，距離空間  $(\mathbb{Q}, d)$  は完備ではないが，数直線  $(\mathbb{R}, d)$  の稠密部分集合である．

有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  に対して，そのコーシー列の極限である無理数を付け加えると数直線  $(\mathbb{R}, d)$  を作ることができるので，距離空間  $(\mathbb{Q}, d)$  は数直線から無理数を除いただけ空席があり，満席ではない．すべてのコーシー列が収束する様に無理数を詰め込んで満席にしたものが数直線の定義であり，このように考えると，次の公理は理解しやすい．

**公理 3** (実数の連続性公理). 実数のコーシー列は収束する．

さて，完備な距離空間のイメージがつかめてきたところで，「逐次近似法」と呼ばれる問題を考えよう．集合  $X$  の任意の元  $x$  に対して，集合  $Y$  のただ一つの元  $T(x)$  が定められているとする．そのとき，この規則  $T$  を集合  $X$  から集合  $Y$  への写像であるという．身近な例を挙げれば， $f(x) = x^2$  という関数は， $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への写像である．もちろん，集合  $X$  と  $Y$  は，同じであってもよい．関数は慣例から  $f(x)$  と括弧を省略しないが，一般の写像  $T(x)$  に対しては，括弧を書かずに  $Tx$  と書くことが慣わしである． $X$  を完備な距離空間， $d$  をその距離とし， $T$  を  $X$  から  $X$  への写像とする，また， $0 < a < 1$  を満たす実数  $a$  があって，

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) \quad (6)$$

が任意の  $x, y \in X$  に対して成立するものとする．このとき，次の三つが成り立つ．

- (i)  $X$  の元  $x_0$  に対して，

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (n \geq 1) \quad (7)$$

とおくと，点列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  はコーシー列になる．

- (ii)  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  とおくと， $Tx^* = x^*$  が成立する．
- (iii)  $Tx = x$  を満たす  $x \in X$  に対して， $x = x^*$  が成立する．

次回，この問題を考える．我々はいよいよ，数学の由緒ある名跡の一つを詣でられる．

## Coffee Break No.5

Kentaro Nagahara

訂正 1. No.4 の本文 7行目, 誤「 $a_\nu \leq a_n$  ( $\nu > n$ )」. 正「 $a_n \leq a_\nu$  ( $\nu > n$ )」.

問題の理解のために, いくつか用語を用意しよう. 写像  $T$  が集合  $X$  から集合  $Y$  への写像であることを,  $T: X \rightarrow Y$  と書き,  $X$  の元  $x$  を  $T$  で移した  $Y$  の元  $Tx$  を,  $x$  の  $T$  による像と呼ぶ. 写像  $T: X \rightarrow X$  が条件 (6) を満たすとき,  $T$  を縮小写像 (**Contraction Mapping**) といい,  $a$  を  $T$  のリプシッツ (**Lipschitz**) 定数という. 逐次近似法とは, 縮小写像  $T: X \rightarrow X$  に対して, まず何でもよいから一点  $x_0$  を取る. これを第 0 近似という. 次いで,  $x_0$  の  $T$  による像  $x_1 = Tx_0$  を作る. これを第 1 近似という. さらに,  $x_1$  の  $T$  による像  $x_2 = Tx_1$  を作る. この操作を繰り返していくのである. もちろん,  $x_0$  は定義され,  $n \geq 1$  に対して  $x_{n-1}$  が定義されれば,  $x_n = Tx_{n-1}$  によって  $x_n$  が定義されるので, 数学的帰納法によって, すべての  $n \geq 1$  に対して  $x_n$  が定義される.

我々が頼れるのは, 定義と公理, そして与えられた条件である. (7) を頼りにして,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1})$$

に気がつく. ここまでくると, 「後は私でも写せます」という具合に (6) に気づき,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1}) \quad (8)$$

を得る. これが等号であれば, 等比数列の議論で

$$d(x_{n+1}, x_n) = a^n d(x_1, x_0)$$

が成立するはずであるが, 残念ながら不等号である. 新たな事態に直面したときは, 最初からやり直す他ないので, 等号の代わりの不等式で置き換え,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a^n d(x_1, x_0) \quad (9)$$

を予想し, 数学的帰納法で証明する.  $n = 1$  を (8) に代入すると, (9) が成立することが即座にわかる.  $n \geq 2$  に対して,  $n - 1$  のときの (9), すなわち

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq a^{n-1} d(x_1, x_0) \quad (10)$$

を仮定すると, (8) と (10) より,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1}) \leq a^n d(x_1, x_0)$$

を得て, (9) が  $n$  のときも成立し, 数学的帰納法によって一般の  $n$  に対しても (9) が成立する. この等号と不等号の違いこそ, 高校数学と大学の違いであるから, 違いのわかる人間に成長してほしい. さて, いよいよ点列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  はコーシー列になることを証明しよう.  $m > n$  のとき, 三角不等式より

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n)$$

が成立し, やはり数学的帰納法により,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \quad (11)$$

と、番号が一つずつずれている二点間の距離の和で上から評価できる。(9)を(11)に代入して、

$$d(x_m, x_n) \leq (a^{m-1} + a^{m-2} + \cdots + a^n)d(x_1, x_0) \quad (m > n) \quad (12)$$

を得る。(12)の右辺は、今度は高校の等比級数の和の公式の適用範囲であり、

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{a^n - a^m}{1 - a}d(x_1, x_0) < \frac{a^n}{1 - a}d(x_1, x_0) + \frac{a^m}{1 - a}d(x_1, x_0) \quad (m > n)$$

を得る。 $0 < a < 1$ であるから、(4)より、次の目標に到達する。

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0. \quad (13)$$

(13)より、点列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ はコーシー列であり、距離空間 $(X, d)$ は完備であったから、コーシー列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ はどのような点であるかわからないが、 $X$ の一点 $x^*$ に収束する。すなわち、

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

が成立する。 $Tx^* = x^*$ を満足する $x^* \in X$ を、 $T$ の不動点といい、不動点の存在の保証をする定理を、不動点定理という。 $Tx^* = x^*$ を証明するには、距離の公理により、 $d(Tx^*, x^*) = 0$ を示せばよい。

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x_n) + d(x_n, x^*)$$

を得るので、 $x_{n+1} = Tx_n$ に注目すると、(6)と(9)より、

$$d(Tx^*, x^*) \leq (a+1)d(x_n, x^*) + a^n d(x_1, x_0) \quad (14)$$

を得る。点列収束の定義から $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0$ が成立しているし、 $0 < a < 1$ より、(14)の右辺において $n \rightarrow \infty$ とすると、(4)が適用でき $d(Tx^*, x^*) \leq 0$ を手に入れる。一方、距離の公理より $d(Tx^*, x^*) \geq 0$ なので、 $d(Tx^*, x^*) = 0$ 。したがって、距離の公理から、目標の $Tx^* = x^*$ が示された。

不動点 $x^*$ の存在を示したので、その一意性、すなわち、 $x^*$ 以外に不動点が存在しないことを示そう。 $x$ を、 $x^*$ とは別の不動点とする。もちろん $x$ は不動点なので、 $Tx = x$ が成立している。一方 $Tx^* = x^*$ だったので、(6)より、

$$d(x^*, x) = d(Tx^*, Tx) \leq ad(x^*, x),$$

したがって

$$(1-a)d(x^*, x) \leq 0$$

を得る。仮定より $0 < a < 1$ であるから、 $d(x^*, x) \leq 0$ が成立し、さっきの論法で、 $d(x^*, x) = 0$ 。故に、 $x^* = x$ を得る。このようにして、別の不動点 $x$ の存在を仮定して、実は元の $x^*$ と等しいということを示す手法は、一意性の証明でよく用いられる。この問題は、第0近似 $x_0$ をどのように選んでも、これに対して次々と縮小写像 $T$ を施して得られる点列は皆、 $T$ の唯一の不動点 $x^*$ に収束し、不動点 $x^*$ は第0近似 $x_0$ の取り方に依らないことが重要である。これをバナッハの不動点定理といい、数学で由緒ある定理の一つである。(問：数直線 $(\mathbb{R}, d)$ から $(\mathbb{R}, d)$ への写像 $Tx = ax$  ( $0 < a < 1$ )が縮小写像であることを示せ。また、 $T$ の不動点は0であることを証明せよ。つまり、任意の実数 $x_0$ に対し、問題と同じように定義した数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ が0に収束することを $\varepsilon - N$ 論法を用いて示せばよい。ただし、 $d(x, y) = |y - x|$ とする。)

**注意 3.** URL : <http://www1.hst.titech.ac.jp/~nagahara/> にも、Coffee Break を掲載している。中間試験を経て、クラスが変わった後も読みたいという危篤な方はそちらからどうぞ。

## Coffee Break No.6

Kentaro Nagahara

バナッハの不動点定理の重要な応用先である、2 階非線形常微分方程式の境界値問題の解の存在と一意性に触れることにしよう。しかし、これまでの準備ではまだ足りないので、いくつかの言葉を定義する。

実数の部分集合  $S$  に対して、ある数  $M$  は  $x \leq M$  ( $x \in S$ ) が成立するとき、 $S$  の上界という。上界を持つ集合を上界であるという。集合  $S$  の最小上界となる数を上限といい、 $\sup S$  で表す。同様に、ある数  $M$  で  $x \geq M$  ( $x \in S$ ) が成立するとき、 $S$  の下界という。下界を持つ集合を下界であるという。集合  $S$  の最大下界となる数を下限といい、 $\inf S$  で表す。上に有界かつ下に有界な部分集合を、有界という。これらの用語は、集合を数列に置き換えても同様の使い方をする。

上限  $\sup S$ 、下限  $\inf S$  については、次のように言い換えることもできる。

**定義 3** (上限). ある数  $\alpha$  が次の 1), 2) を満たすとき、 $\alpha$  は  $S$  の上限である。(つまり、 $\alpha = \sup S$ .)

- 1)  $x \leq \alpha$  ( $x \in S$ )
- 2)  $\gamma < \alpha$  ならば、 $\gamma < x \leq \alpha$  を満たす  $x$  が  $S$  の中に存在する。

**定義 4** (下限). ある数  $\beta$  が次の 1), 2) を満たすとき、 $\beta$  は  $S$  の下限である。(つまり、 $\beta = \inf S$ .)

- 1)  $x \geq \beta$  ( $x \in S$ )
- 2)  $\gamma > \beta$  ならば、 $\gamma > x \geq \beta$  を満たす  $x$  が  $S$  の中に存在する。

実数の連続性公理は、上限を用いて次のように言い換えることができる。

**公理 4** (ワイエルシュトラスの公理). 上に有界な実数の集合  $S$  は上限を持つ。

公理 4 について、具体例を考えてみよう。実数の部分集合  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \sqrt{2}\}$  を考える。このとき、 $S$  の上限は  $\sup S = \sqrt{2}$  である。 $\mathbb{Q}$  においては、上に有界な集合であっても上限を持たない場合がある。たとえば、上と同様に有理数の部分集合  $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ かつ } x^2 < 2\}$  を考えると、 $\sqrt{2}$  に等しい有理数は存在せず、かつ  $\sqrt{2}$  に近い有理数が存在する (命題 2 参照) から、 $\mathbb{Q}$  の中では  $\sup E$  は存在しない。なお、実数の部分集合  $\tilde{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ かつ } x^2 \leq 2\}$  のときは、 $\max \tilde{S}$  が存在し、 $\max \tilde{S} = \sqrt{2}$  である。もちろん  $\sup \tilde{S} = \sqrt{2}$  でもある。つまり、実数の部分集合が最大値を持つなら、最大値は上限と一致する。上限、または下限は、集合や数列が取りうるぎりぎりの値と捉えることができる。

数列  $\{a_n\}$  の項の一部を取り出し、順序を変えないで並べてできる (無限) 数列を、 $\{a_n\}$  の部分列という。これは、自然数の増加列  $n_1 < n_2 < \dots$  をとって、 $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$  と表すことができる。これらの用語を用いて、次の実数の連続性公理を紹介しよう：

**公理 5** (ボルツァノ・ワイエルシュトラスの公理). 有界数列  $\{a_n\}$  は収束部分列を含む。

つまり、数列  $\{a_n\}$  が有界 (つまり、ある正数  $M$  が存在し、 $|a_n| \leq M$  ( $n \geq 1$ )) であれば、適切に部分列  $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$  を取れば  $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$  は収束することをあらわしている。たとえば、数列  $a_n = (-1)^n$  は有界であるが、収束しない。しかしここから部分列  $a_1, a_3, \dots, a_{2k-1}, \dots$  を取ると、 $a_{2k-1} = 1$  ( $k \geq 1$ ) であるから、 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = 1$  となり、収束する。一般には部分列をどのように取ればよいかはわからないが、数列が有界であれば、このように収束する部分列が取れることも、万人が認める命題である。

## Coffee Break No.7

Kentaro Nagahara

前回は公理の紹介ばかりで終わってしまったので、本題に近づこう。微分方程式を語るうえでは、関数の連続性は欠かせない重要な事実である。関数  $f(x)$  は  $x = x_0$  の近くで定義されているとする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

であるならば、 $f(x)$  は  $x = x_0$  で連続であるという。これをより厳密に、 $\epsilon - \delta$  論法と呼ばれる、 $\epsilon - N$  論法と類似の方法を使って書くと、次のようになる。

**定義 5** (関数の連続性). 任意の実数  $\epsilon > 0$  に対して、ある正数  $\delta = \delta(\epsilon)$  が存在し、 $|x - x_0| < \delta$  を満たす任意の実数  $x$  に対して、

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

が成り立つとき、 $f(x)$  は  $x = x_0$  で連続であるという。

**注意 4.** ある実数  $x_a$  について、 $f(x_a) = \pm\infty$  となる関数  $f(x)$  は、 $x = x_a$  で不連続である。そもそも  $\infty$  が実数ではないから、このようなものは関数ではないと一蹴するのもいいが、 $\infty$  に、順序と演算規則を定義し、実数  $\mathbb{R}$  に  $\{\pm\infty\}$  を付け加えた「補完数直線 ( $\overline{\mathbb{R}}$  と書く)」を定めることにより、 $\overline{\mathbb{R}}$  から  $\overline{\mathbb{R}}$  への写像を関数と呼ぶ場合があることに触れねばならない。この場合、 $\infty$  の順序の定義「 $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  に対し、 $a < \infty$  と定義する」および演算の定義「 $-1 \times \infty = -\infty$ 」から、 $|f(x) - f(x_a)| < \epsilon \Leftrightarrow \infty - f(x) < \epsilon \Leftrightarrow \infty < \epsilon + f(x)$  となり、 $\epsilon + f(x) < \infty$  に矛盾する。よって、 $f(x_a) = \pm\infty$  となる点  $x_a$  では関数  $f(x)$  は点  $x = x_a$  で連続でないことが示される。また、 $\infty - \infty$  は不定形と呼ばれ、矛盾のない定義ができないので、ある区間  $I$  上で  $f(x) = \infty$  などという関数については、そもそも連続性を議論できないことになる。）

また、関数の連続性と、次に述べる点列連続性は、同値である。

**定義 6** (点列連続性). 極限が  $x_0$  である任意の数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  に対して、 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  が成り立つとき、関数  $f(x)$  は  $x = x_0$  で点列連続である。但し、数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  は、関数  $f(x)$  の定義域上にあるとする。

*Proof.* 定義 5  $\Leftrightarrow$  定義 6 の証明をしよう。定義 5  $\Leftarrow$  定義 6 は、極限が  $x_0$  である任意の数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  を取ると、点列の収束の定義 1 から、 $\delta$  に対してある自然数  $N$  で、 $n \geq N$  ならば  $|x_n - x_0| < \delta$  を満たすものがとれる。したがって、 $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$  ( $n \geq N$ ) が成り立ち、点列連続性が言える。逆に、定義 5  $\Rightarrow$  定義 6 は、まず極限が  $x_0$  である任意の数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  を取り、 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  の項を交互に並べてできる数列を  $\{x''_n\}_{n \geq 1}$  とおく。すなわち、 $x''_{2m-1} = x_m$ ,  $x''_{2m} = x'_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ )。仮定より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = f(x_0)$  であり、 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  は  $\{x''_n\}_{n \geq 1}$  の部分列であったから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = f(x_0)$ 。さて、関数の連続性が成り立たないと仮定して、背理法で証明しよう。関数の連続性を否定する、つまり、ある  $\epsilon_0$  が存在して、どんな (小さな)  $\delta > 0$  に対しても、 $|x - x_0| < \delta$  を満たす実数  $x$  で、 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$  となるものが存在すると仮定する。各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\delta = \frac{1}{n}$  とおくと、 $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  を満たす実数  $x_n$  で、 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$  となるものが存在する。このようにして構成する実数数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  は、 $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  より  $x_0$  に収束する。このとき、仮定 (定義 6) より、 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  でなければならないが、これは  $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$  に矛盾する。□

## Coffee Break No.8

Kentaro Nagahara

2 階非線形常微分方程式の境界値問題の解の存在と一意性の話を理解するには、残念ながらまだ準備が足りない。数学はこういうことをするから時間がかかる。(しかし、それを気にしてはいいい理解はできない.)

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$  ならば、 $f(x)$  は  $x = x_0$  で右連続であるという。つまり、点列連続性でいうと、 $x_n \rightarrow x_0 + 0$  となる任意の数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  に対し、 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  が成り立つ。左連続も同様に、 $x_n \rightarrow x_0 - 0$  となる任意の数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  に対し、 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  が成り立つとき、 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$  と書き、 $f(x)$  は  $x = x_0$  で左連続であるという。 $f(x)$  が区間  $I \subset \mathbb{R}$  で定義されていて、 $I$  の各点で連続であるとき、 $f(x)$  は  $I$  上で連続であるという。ただし、 $I$  の端点が  $I$  に属しているときは、その端点では片側連続（左連続または右連続）でよい。

さて、 $f(x)$  を閉区間  $[a, b]$  上で連続な関数とする。背理法で、 $f(x)$  が  $[a, b]$  上で最大値、最小値を持つことを証明しよう。まず、 $f(x)$  の値の集合  $S = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  が上に有界でなければ、任意の自然数  $n$  はその上界ではない。つまり、各  $n$  に対して、 $[a, b]$  の点  $x_n$  であって、

$$f(x_n) > n$$

を満たすようなものがある。実数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  は、 $[a, b]$  から取ったので、もちろん上に有界であり、公理 5 より収束部分列を持つ。その極限を  $x_0$  としよう。もちろん、 $a \leq x_0 \leq b$  である。関数  $f(x)$  は  $[a, b]$  上連続であったから、 $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$  となり、これは関数  $f(x_0) < \infty$  であることに矛盾する。(注意 4 を考えてもよい。) したがって、 $S$  は上に有界である。続いて、関数  $f(x)$  が  $[a, b]$  上で最大値を持つことを示そう。ワイエルシュトラスの公理（公理 4）から、 $S$  は上限  $M$  を持つ。任意の自然数  $n$  に対して、 $M$  より小さな  $M - \frac{1}{n}$  は、 $M$  が最小上界であることから、定義もはや上界ではない。したがって、定義 3 より、各  $n$  に対して、 $[a, b]$  の点  $x'_n$  であって、

$$f(x'_n) > M - \frac{1}{n}$$

を満たすものが存在する。有界な実数列  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  は、収束部分列を持つから、その極限を  $x'_0$  としよう。関数  $f(x)$  は  $x = x'_0$  でも連続であったので、

$$f(x'_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = M$$

となり、関数  $f(x)$  は点  $x'_0$  で最大値を取ることが証明できた。同様に、 $-f(x)$  も  $[a, b]$  上で連続なので、最大値を持つ。よって、符号を反転させると、 $f(x)$  は最小値を持つことが言える。以上の結果は、次のワイエルシュトラスの定理として知られている。

**定理 1** (ワイエルシュトラスの定理). 連続な関数  $f(x)$  は、有界閉集合  $[a, b]$  上で最大値、最小値を持つ。

なお、このワイエルシュトラスの定理を用いて、教科書にある平均値の定理が証明できる。さて、ようやく準備のための準備が終わったところである。今度は、微分方程式の解が存在する「関数空間」の設定をすることにして、証明は次回行うことにする。

**命題 3.** 実直線  $\mathbb{R}$  上の有界な実数値連続関数全体のなす集合を  $X$  とする。 $X$  上の距離  $d$  を

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$$

によって定義すると、距離空間  $(X, d)$  は完備である。

## Coffee Break No.9 (Revised edition)

Kentaro Nagahara

- 命題 3 の証明.      • 1) 距離空間  $(X, d)$  における任意のコーシー列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  に対して,  $\sup_{n \geq 1} \{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|\} < \infty$  であることを示そう. ここで, 関数が並ぶ列のことを, 関数列という. 今回与えられているコーシー列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  は, 関数がいくつも並んでいるものなので, 関数列である. 本来であれば, 関数  $f_n$  は  $x$  に関する関数なので,  $f_n(x)$  と書いたほうが良さそうだが,  $f_n(x)$  で表される実数値に注目したいのか, 関数  $f_n$  に注目したいのかが不透明になる. 今回は関数を要素として扱うので,  $x$  を省略して  $f_n$  としている. さて, 関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  はコーシー列であるから, 自然数  $n_1$  があって,  $m, n \geq n_1$  のとき,  $d(f_m, f_n) < 1$ , 即ち,  $|f_m(x) - f_n(x)| < 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) が成立する.  $X$  に属する有限の  $n_1$  個の関数は,  $X$  が有界な実数値関数としているので, 有界であるから,  $\max_{1 \leq n \leq n_1} \{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|\} < \infty$  である.  $n > n_1$  に対しては,  $|f_n(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + |f_n(x) - f_{n_1}(x)| < |f_{n_1}(x)| + 1$  を得るので,  $n \leq n_1$  の場合と,  $n > n_1$  の場合に分けて考え, すべての自然数  $n$  に対し纏めて  $\sup_{n \geq 1} \{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|\} < \infty$  を得る.
- 2) 続いて, 関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  ( $f_n \in X$ ) と,  $\mathbb{R}$  上の実数値関数  $f$  に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$  が成り立つとき,  $f \in X$  であることを示そう.  $f \in X$  ということは, 仮定を満たす実数値関数  $f$  が  $\mathbb{R}$  上連続で, かつ  $\mathbb{R}$  上有界であることを示せばよい.
- [ $f$  の連続性] 任意の正数  $\varepsilon$  を取る.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$  の定義より, ある自然数  $N$  が存在し,  $n > N$  の時,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ . ここで, 関数  $f_N(x) \in X$  であるから,  $f_N(x)$  は任意の点  $x_0 \in \mathbb{R}$  に於いて連続である. 従って, 連続性の定義により, ある正数  $\delta$  があって,  $|x - x_0| < \delta$  を満たすすべての  $x$  に対して,  $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$ . 三角不等式により,  $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ . よって, 連続性の定義により, 関数  $f(x)$  は  $\mathbb{R}$  の任意の点  $x_0$  において連続である.
- [ $f$  の有界性]  $\varepsilon = 1/3$  とする.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$  の定義より, ある自然数  $\tilde{N}$  が存在し,  $n > \tilde{N}$  の時,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < 1/3$ . すなわち,  $|f(x)| \leq |f(x) - f_{\tilde{N}+1}(x)| + |f_{\tilde{N}+1}(x)| < 1/3 + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{\tilde{N}+1}(x)|$  が任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して成立する. 右辺は,  $x$  に無関係であるから, 関数  $f(x)$  は数直線上有界である.
- 3) 最後に, 距離空間  $(X, d)$  が完備であること, すなわち, 任意のコーシー列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  がある関数  $f \in X$  に収束することを証明しよう. 言い換えると,  $d(f_m, f_n) \rightarrow 0$  ( $m, n \rightarrow \infty$ ) を満たす関数列  $f_n$  から,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$  が成立するような関数  $f$  をうまく構成し,  $f \in X$  を証明することになる. 数直線  $\mathbb{R}$  の任意の点  $x$  を取る. 点  $x$  における関数値の差  $|f_m(x) - f_n(x)|$  は, 距離の定義  $d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$  より,  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)| = d(f_m, f_n)$  である. 関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  はコーシー列であるから,  $|f_m(x) - f_n(x)| \leq d(f_m, f_n) \rightarrow 0$  ( $m, n \rightarrow \infty$ ) が成立し, 実数の連続性公理の一つ, 公理 3 (実数のコーシー列は収束する) により, 実数列  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  はある実数  $a_x$  に収束する. すなわち, 各  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - a_x| = 0$  を満たす値  $a_x$  が取れることになる.
- ここで, 関数  $f$  を  $f(x) = a_x$  で定めると,  $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が任意の点  $x$  で成立する. 定義どおり書き下すと, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対し, ある自然数  $M$  が存在して,  $m > M$  に対して,  $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ . 一方, 関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  がコーシー列であったので, 先ほどの正数  $\varepsilon$  に対して,

自然数  $N$  があって、 $m, n > N$  の時、 $|f_m(x) - f_n(x)| \leq d(f_m, f_n) < \varepsilon$ . すなわち、任意の点  $x$  で、 $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \leq d(f_m, f_n) + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ . すなわち、 $d(f_n, f) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が成立することが示された。

$d(f_n, f) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$  より、関数  $f$  は 2) の条件を満たす。従って、 $f \in X$  である。コーシー列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  は任意に取っていたので、任意のコーシー列  $f_n$  は関数  $f \in X$  に収束する。従って  $X$  は完備である。

□

各  $x$  を固定した実数列  $f_n(x)$  が  $f(x)$  に収束していることを、関数列  $f_n$  は関数  $f$  に各点収束するという。一方、ある区間  $I$  上の点  $x$  のどれを取っても  $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$  が成立するとき、関数列  $f_n$  は関数  $f$  に一様収束するという。関数列  $f_n$  が  $f$  に一様収束している時、 $f$  を関数列  $f_n$  の一様収束極限という。2) で示したことは、 $\mathbb{R}$  上連続な関数列  $f_n$  の一様収束極限は  $\mathbb{R}$  上連続であるということを表している。

最後の準備として、次の命題を証明しよう。

**命題 4.** 有界閉区間  $[a, b]$  で連続な関数列  $f_n(x)$  の一様収束極限  $f(x)$  は  $[a, b]$  上連続である

先ほどの命題 3 と異なるのは、定義域が  $[a, b]$  に留まただけでなく、関数に連続性しか仮定されていないことである。ここで、有界閉区間  $[a, b]$  で連続な関数全体の集合を  $C[a, b]$  と書くことにする。

命題 4 の証明. 仮定より、任意の正数  $\varepsilon$  に対して、 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  ( $n \geq n_0, a \leq x \leq b$ ) が成立するような  $n_0$  が存在する。関数  $f_{n_0}(x)$  は  $x_0 \in [a, b]$  で連続であるから、正数  $\delta$  があって、 $|x - x_0| < \delta$  ( $x \in [a, b]$ ) ならば、 $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon$ . 三角不等式により、 $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$  が成立することが確かめられ、一様収束極限  $f$  も連続であることが確かめられた。したがって、 $f \in C[a, b]$  である。

□

$C[a, b]$  上の距離  $d$  を

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

によって定義する。(先ほどの距離  $d$  との違いは、区間が実数  $\mathbb{R}$  から閉区間  $[a, b]$  に変わっていることのみである。) この  $d$  を用いると、距離空間  $(C[a, b], d)$  の点列  $f_n$  の一様収束極限が点  $f$  であることを

$$d(f_n, f) < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

と表せる。これは、No.1 の点列の収束の定義から、距離空間  $(C[a, b], d)$  において点列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  が点  $f$  に収束することを意味する。

任意のコーシー列  $f_n \in C[a, b]$  に対して、命題 3 の証明 3) と同様の議論をすると、コーシー列  $f_n \in C[a, b]$  の一様収束極限  $f$  を構成できる。(  $f$  を構成する際、各点の極限値を並べただけで、区間には一切言及していない証明であったことに注目されたい。 ) さらに、3) で構成した  $f_n$  の一様収束極限  $f$  は、命題 4 により、 $f \in C[a, b]$  である。従って、距離空間  $(C[a, b], d)$  は完備である。

**注意 5.** 前回配った証明を読み返すと、とてもわかりにくかったので改訂版を作ることにした。いまだにお勧めのコーヒーの情報は入ってこない。

## Coffee Break No.10 (Revised edition)

Kentaro Nagahara

まだまだ準備段階である。一様連続性という、重要な概念について説明しよう。

**定義 7** (一様連続性).  $f(x)$  を、区間  $I \subset \mathbb{R}$  で定義された関数とする。任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある正数  $\delta$  を取る。このとき、任意の  $x' \in I$  に対して、 $|x - x'| < \delta$  を満たす任意の  $x$  を取ると、

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

が成立するとき、関数  $f$  は  $I$  上一様連続であるという。

これはすなわち、関数  $f$  が  $I$  上で一様連続ならば、区間  $I$  を虫眼鏡や顕微鏡でどんどん拡大すれば、拡大した区間  $I$  上の関数  $f$  はほとんど定数と同じ平らな関数とみなせる、ということを言っているのである。

ここで畳みかけるように、次の驚異的な定理を紹介しよう。

**定理 2.** 関数  $f(x)$  が閉区間  $I$  上で連続ならば、 $f(x)$  は  $I$  上一様連続である。

*Proof.* 背理法で証明する。背理法で示すときは、結論を否定すればよい。今回の場合は、一様連続が成り立たないと仮定すればよいのである。すなわち、ある  $\varepsilon > 0$  に対しては、どんな  $\delta > 0$  を取っても、 $\delta$  に依存するある  $x' = x'(\delta) \in I$  と、 $|x - x'| < \delta$  を満たすある  $x = x(\delta) \in I$  を取ると、

$$|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

が成立すると仮定する。(一見すると、一様連続性を否定するだけでかなりややこしそうであるが、実はこのような否定は機械的に簡単に作ることができる。これは、またの機会に述べることにする。) 今、仮定より、ある  $\varepsilon > 0$  をとると、それに対して任意の正数  $\delta$  がとれる。任意ということは何でもよいということなので、 $\delta = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とする。このとき、 $\delta = \frac{1}{n}$  に依存するある  $x' = x'(1/n) \in I$  と、 $|x - x'| < \frac{1}{n}$  を満たすある  $x = x(1/n) \in I$  が取れる。この  $x, x'$  の組は  $n$  に依存して決まるので、それぞれ  $x_n, x'_n$  と置くことにしよう。すると、数列  $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{x'_n\}_{n \geq 1}$  は、閉区間  $I$  上の点列であるから、有界である。すなわち、公理 5 より、有界数列は収束部分列を含むから、ある部分列  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  で収束するものが存在する。この極限値を  $x_0$  とする。実は、この部分列と同じ添え字を持つ  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  の部分列  $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 1}$  も、 $x_0$  に収束することを証明しよう。 $x_{n_k} \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であるから、 $|x_{n_k} - x_0| \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であり、 $n_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) より、 $\frac{1}{n_k} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であることに注意すると、

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0|$$

となる。したがって、 $x'_{n_k} \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ )、すなわち  $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 1}$  も同じ  $x_0$  に収束することが示された。 $f(x)$  は連続であったから、点列連続性を持ち、 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  かつ  $f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  となる。従って、 $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) となるが、仮定により、ある  $\varepsilon > 0$  に対して、 $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$  が成立していないといけなないので、矛盾である。したがって、背理法により、関数  $f(x)$  が閉区間  $I$  上で連続ならば、 $f(x)$  は  $I$  上一様連続であることが示された。□

この一様連続性をはじめ、これまでに紹介した様々な議論は、実数 1 つを変数に持つ 1 変数関数だけでなく、実数 2 つを変数に持つ 2 変数以上の多変数関数でも成り立つ。

## Coffee Break No.11

Kentarō Nagahara

多変数関数を扱うために、二つの実数の組である平面について、改めて考察しよう。実数を二つ並べた組  $(x, y)$  全体の集合を平面といい、これを  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  と書く。平面  $\mathbb{R}^2$  上の 2 点  $P(x, y)$ ,  $Q(x', y')$  に対して、2 点間の距離  $d(P, Q)$  を、

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

で与えると、 $d(P, Q)$  は距離の公理を満たす。すなわち、集合  $\mathbb{R}^2$  の任意の二つの元  $P(x, y)$ ,  $Q(x', y')$  の組に対して、実数  $d(P, Q)$  が対応して、距離の公理

- (D1)  $d(P, Q) \geq 0$ ,  $P = Q \Leftrightarrow d(P, Q) = 0$ ,
- (D2)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ,
- (D3) 集合  $\mathbb{R}^2$  の任意の元  $R$  に対して、 $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$ .

が成立する。(問：これを証明せよ.)

注意 6. この他には、

$$d_1(P, Q) = |x - x'| + |y - y'|$$

なども距離の公理を満たす。(問：これを証明せよ.)

一般に、 $n$  個の実数の組  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  全体を、実  $n$  次元数空間といい、 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}$  が  $n$  個)  $= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)\}$  で表す。もちろん、 $n \geq 1$  である。 $x$  の各成分  $x_i$  を、 $x$  の第  $i$  成分と呼ぶ。 $\mathbb{R}^n$  の二つの点  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $x_i, y_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)$ ) に対し、距離  $d(x, y)$  を

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \tag{15}$$

で定義すると、 $d(x, y)$  は距離の公理を満たす。

*Proof.*  $\mathbb{R}^n$  の 3 点を  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  とする。距離の公理 (D1), (D2) は、定義からすぐに導かれる。問題は (D3) の三角不等式  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  であろう。(D3) に (15) を当てはめると、

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}$$

ここで、 $x_i - y_i = a_i$ ,  $y_i - z_i = b_i$  と書くことにすると、 $x_i - z_i = a_i + b_i$  となることに注意して、上の式を

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \tag{16}$$

と書くことができる。ここで、次の主張を用意しよう。

主張 1.  $b \geq 0$  ならば,

$$a^2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$$

が成立する. 更に,  $a \geq 0$  かつ  $b \geq 0$  であれば,

$$a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b$$

*Proof.*  $(\Rightarrow)$   $a^2 \leq b^2$  の両辺の平方を取ると,  $\sqrt{x}$  は単調増加関数であったので,  $\sqrt{a^2} \leq \sqrt{b^2}$  が成立する. ここで,  $\sqrt{x^2} = |x|$  であることに注意すると, 仮定から  $a \leq |a|$ ,  $b = |b|$  なので,

$$a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{b^2} = |b| = b$$

$(\Leftarrow)$  仮定より,  $0 \leq a \leq b$  である.  $x \geq 0$  ならば  $x^2$  は単調増加関数であることを利用すると, 両辺を 2 乗して,  $a^2 \leq b^2$  となり, 主張を得る.  $\square$

主張 1 より, (16) は, 両辺を 2 乗した次の式と同値になる.

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

ここで, 左辺を展開して,

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)} + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

と書くことができる. 両辺から  $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2$  を消去して 2 で割ると,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}$$

を得る. ここまで, (D3) の式を同値変形したのみである. 更に主張 1 より,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}$$

となるので,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \quad (17)$$

が証明できれば, (D3) が証明できることになる. (17) を **Schwarz** の不等式という. この不等式の証明は, いろいろな手法が知られているが, 最もスタンダードなものは, 単純な式変形による.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 &= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n (i \neq j)} a_i^2 b_j^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となり，(17) が成立する．( $\Sigma$  の下がすごいことになっているが，臆することはない．実際に手を動かして，最左辺を計算すれば，この意味が分かる．) また，巧妙な証明方法としては，

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

を考える．中央の式から明らかに，任意の実数  $x$  に対して  $f(x) \geq 0$ ．したがって，最右辺の 2 次式の判別式  $D$  は  $D \leq 0$  でなければならない．ゆえに，

$$\frac{D}{4} = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

となり，(17) が成立する．**Schwarz** の不等式 (17) が成立すれば，三角不等式 (D3) が成立するので， $d(x, y)$  は距離の公理を満たす． □

$\mathbb{R}^n$  上定義された距離  $d$  との組  $(\mathbb{R}^n, d)$  は， $n$  次元 **Euclid** 空間と呼ばれる距離空間となる．しばらくの目標は， $n$  次元 Euclid 空間が完備な距離空間であることを示すことであるが，今後の議論のために用語を用意しなくてはならない．

## Coffee Break No.12

Kentaro Nagahara

$\mathbb{R}$  の部分集合について,  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  を開区間 (**open interval**) といい,  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  を閉区間 (**closed interval**) というのであった. これに対応するように,  $(\mathbb{R}^n, d)$  の部分集合  $E$  に対して, 開集合と閉集合という概念を定義をしよう. そのための道具を用意する.

**定義 8** (開球).  $\mathbb{R}^n$  の部分集合

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < r\}$$

を, 点  $a$  を中心とする半径  $r$  の開球 (**open ball**) という.

また,  $r$  を  $\varepsilon$  に置き換えただけの

$$B(a, \varepsilon) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

を, 点  $a$  の  $\varepsilon$  近傍 (**neighborhood**) (あるいは,  $\varepsilon$  を省略して単に  $a$  の近傍) というとも多い. これは数学的な変形をしたわけではなく, 文字や呼び方を変えただけである. (開球に限らないが, 数学用語の表記は, 使う場面や本によって異なるので, 読む際には注意を要する.)

点  $a \in \mathbb{R}^n$  のある近傍  $B(a, \varepsilon)$  が  $E$  に含まれているとき, すなわち, 点  $a \in \mathbb{R}^n$  に対して, ある  $\varepsilon > 0$  が存在して,  $B(a, \varepsilon) \subset E$  となるとき, 点  $a$  は  $E$  の内点 (**interior point**) であるという.  $E$  の内点全体の集合を  $E^\circ$  や,  $E^i$  で表す. これに対して,  $a \in \mathbb{R}^n$  のある近傍  $B(a, \varepsilon)$  が  $E$  に含まれていないとき, すなわち点  $a \in \mathbb{R}^n$  に対して, ある  $\varepsilon > 0$  が存在して,  $B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus E$  となるとき, 点  $a$  は  $E$  の外点であるという.  $E$  の外点全体の集合を  $E^e$  で表す. なお,  $\mathbb{R}^n \setminus E$  は  $\mathbb{R}^n$  から  $E$  に属する点を取り除いた点全体の集合を表しており, これを  $E$  の補集合という. 全体集合 (この場合は  $\mathbb{R}^n$ ) に誤解の恐れがないときは, 補集合を  $E^c$  で表す. 正確に述べれば,

$$E^c = \mathbb{R}^n \setminus E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin E\}$$

である. 内点でも外点でもない点を,  $E$  の境界点という.  $E$  の境界点全体の集合を  $\partial E$  と書く. 点  $a \in \mathbb{R}^n$  が境界点であるための必要十分条件は,  $a$  の任意の開球が  $E$  に属している点も,  $E$  に属していない点 ( $\mathbb{R}^n \setminus E$  に属している点) も含むことである. (問: このことを証明せよ.) 定義から明らかに,  $E$  の内点は  $E$  に属し,  $E$  の外点は  $E$  に属さない.  $E$  の境界点は  $E$  に属することも属さないこともある. これを用いて, 開集合, 閉集合を定義しよう.

**定義 9** (開集合).  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $E$  の任意の境界点が  $E$  に属さないとき, すなわち  $E = E^\circ$  のとき,  $E$  は開集合 (**open set**) であるという. なお, 境界点は  $E$  に属していても良いが, 内点は定義から  $E$  に属しているので, 一般に  $E^\circ \subset E$  が成立する.

また, これと対になる形で, 閉集合が定義できる.

**定義 10** (閉集合).  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $E$  の任意の境界点が  $E$  に属するとき, すなわち  $E = E^\circ \cup \partial E$  であるとき,  $E$  は閉集合 (**closed set**) であるという.

なお,  $E^\circ \cup \partial E$  を,  $\overline{E}$  または  $E^a$  と表す. 例えば, 次の  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $E$  は, 開集合である.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

この  $E$  が開集合であることを示すには、 $E = E^\circ$ 、すなわち  $E$  が境界点を含まないことを示せばよい。したがって、任意の  $E$  の元  $p(x, y)$  を取り、それに対してある実数  $r > 0$  が存在して、 $B(p, r) \subset E$  であることを示せば良いのである。  $p(x, y) \in E$  ならば、 $x^2 + y^2 = r'$  とおくと、 $p \in E$  であることから  $r' < 1$  である。したがって、 $r = \frac{1-r'}{4} > 0$  とすると、 $B(p, r) \subset E$  であることが示される。(実際に図を書くと、視覚的に確認できるであろう。) なお、 $E$  の境界点全体の集合  $\partial E$  は

$$\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

であり、 $E$  の外点全体  $E^e$  は

$$E^e = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

である。また、定義から、 $M$  の境界点  $\partial M$  が  $M$  に含まれている時、 $M$  は閉集合である。つまり、 $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $M$  が

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

で与えられていれば、 $M$  は閉集合である。なお、 $M^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 、 $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  であるから、 $M = \overline{M} = M^\circ \cup \partial M$  であることもすぐにわかるであろう。

次に、閉集合に関する極めて重要な定理を紹介する。定義 10 は、次の定理と同値である。

**定理 3.**  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $E$  が閉集合であるための必要十分条件は、 $E$  から取り出した収束する点列の極限は必ず  $E$  に属することである。

*Proof.*  $(\Rightarrow)$   $E$  を閉集合、点列  $\{P_n\}_{n \geq 1} \subset E$ 、 $P_n \rightarrow P$  ( $n \rightarrow \infty$ ) とする。定義より、 $d(P_n, P) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから、 $P$  のどんな近傍  $B(P, \varepsilon)$  も (すなわち  $\varepsilon > 0$  が任意であっても)  $\{P_n\}$  の点を含む。なぜなら、 $P$  の近傍  $B(P, \varepsilon)$  をとると、点列の収束の定義から、この  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $N \in \mathbb{N}$  が存在して、 $n > N$  となる任意の自然数  $n$  に対して、 $d(P_n, P) < \varepsilon$  が成立する。したがって、 $B(P, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(P, x) < \varepsilon\}$  より、 $n > N$  以上の点  $P_n$  は  $B(P, \varepsilon)$  に入っていることがわかるからである。したがって、 $E$  に属している点を含まない点  $P$  の近傍は存在しないので、 $P$  は  $E$  の外点ではない。よって、 $P$  は  $E$  の内点、または境界点であることがわかるが、仮定より、 $E = E^\circ \cup \partial E$  であるので、 $P \in E$  であることがわかる。

$(\Leftarrow)$   $P$  を  $E$  の境界点とすると、 $P$  のどんな近傍  $B(P, \varepsilon)$  も  $E$  に属する点を含む。今、 $\varepsilon = \frac{1}{n}$  とおくと、 $B(P, \frac{1}{n})$  に含まれる  $E$  の点  $P_n$  が存在する。したがって、任意の自然数  $n$  に対して、 $P_n \in B(P, \frac{1}{n})$  となる  $E$  の点からなる点列  $\{P_n\}_{n \geq 1}$  を構成できる。No.1 で示したように、 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) なので、 $\{P_n\}_{n \geq 1} \subset E$  は  $P$  に収束する。仮定から、任意の  $E$  から取り出した収束する点列の極限は  $E$  に属するので、任意の境界点  $P \in \partial E$  は  $E$  に属す。したがって、 $E$  は閉集合である。  $\square$

次に、 $\mathbb{R}$  の時と同様に、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $E$  が有界であることの定義をしよう。

**定義 11.**  $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $E$  に対して、 $E \subset B(0, R)$  となる定数  $R$  が存在するとき、 $E$  は有界であるという。

これは、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$  と考えたとき、各成分  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が有界であることと同値である。部分集合  $E$  に含まれる点  $x \in \mathbb{R}^n$  の各成分が有界であれば、各成分の 2 乗の有限和である距離  $d(0, x)$  も有限である。したがって、 $E \subset B(0, R)$  となる定数  $R$  が存在する。逆に、 $E \subset B(0, R)$  となる実数  $R$  が存在したと仮定する。もし、ある成分  $x_i$  が非有界であれば、任意の実数  $\tilde{R}$  に対して、 $R < x_i$  となる  $x \in E$  の成分  $x_i$  が存在することになるので、仮定に矛盾する。よって各成分はすべて有界であることがわかる。

有界のありがたみを実感するために、実数  $\mathbb{R}$  で考えた公理 5 と同様に、次の定理を証明しよう

**定理 4** (ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理). 有界な点列は, 収束する部分列を含む.

定理の証明に移る前に, 次の不等式

$$|P_{i,k} - P_i| < \sqrt{\sum_{i=1}^n |P_{i,k} - P_i|^2} = d(P_k, P) < \varepsilon$$

を用いて,  $\{P_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$  が点  $P \in \mathbb{R}^n$  に収束するならば,  $P_k = (P_{1,k}, P_{2,k}, \dots, P_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $P = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n$  とおいたとき, 各成分  $P_{i,k} \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) もそれぞれ  $P_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) に収束することに気をつけよう.

*Proof.*  $\{P_k\}_{k \geq 1}$  を有界とする.  $P_k = (P_{1,k}, P_{2,k}, \dots, P_{n,k}) \in \mathbb{R}^n$  とおくと, 各成分を抜き出した数列  $\{P_{i,k}\}_{k \geq 1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は, 前述の考察から有界である. したがって, 各数列  $\{P_{i,k}\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}$  において, 公理 5 が使え, 収束する部分列を含む. 第 1 成分から順に考えよう. 数列  $\{P_{1,k}\}_{k \geq 1}$  は収束する部分列を含むので, これを  $\{P_{1,k_m}\}_{m \geq 1}$  とおくことにし, 収束先を  $P_1$  とする.

$P_1$  に収束する部分列  $\{P_{1,k_m}\}_{m \geq 1}$  の添え字を, そのまま  $\{P_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$  の添え字として当てはめると,  $\{P_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$  の部分列  $\{P_{k_m}\}_{m \geq 1}$  は, 第 1 成分が  $P_1$  に収束する点列となる. ここで, 部分列  $\{P_{k_m}\}_{m \geq 1}$  のそのほかの成分については, 収束するかどうかわからない.

一般に, 点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  が  $\alpha$  に収束するとき, その部分列  $\{a_{n_k}\}_{k \geq 1}$  も  $\alpha$  に収束することに注意しよう. すなわち, 点列  $\{P_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$  の部分列  $\{P_{k_m}\}_{m \geq 1}$  は第 1 成分が  $P_1$  に収束するから, その部分列もまた第 1 成分が  $P_1$  に収束する. 部分列  $\{P_{k_m}\}_{m \geq 1}$  の第 2 成分のみを抜き出した数列  $\{P_{2,k_m}\}_{m \geq 1}$  は有界であるから, またしても公理 5 が使え, 収束する部分列を含む. その部分列を  $\{P_{2,k_{m_q}}\}_{q \geq 1}$  とし, 収束先を  $P_2$  とおく.

$P_2$  に収束する部分列  $\{P_{2,k_{m_q}}\}_{q \geq 1}$  の添え字を, そのまま  $\{P_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$  の添え字として当てはめると,  $\{P_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$  の部分列  $\{P_{k_{m_q}}\}_{q \geq 1}$  は, 第 1 成分が  $P_1$  に収束する点列の部分列であり, 第 2 成分が  $P_2$  に収束する部分列でもある.

このような手順を残り  $n - 2$  回行くと, 各成分がそれぞれ収束する部分列を構成することができる. つまり, 第 1 成分から第  $i$  成分までが収束する部分列から, 第  $(i + 1)$  成分が収束する部分列を取り出す操作を  $n$  回続けるのである. すると, 最終的に得られた, 第  $n$  成分が  $P_n$  に収束する部分列  $\{P_{k_l}\}_{l \geq 1}$  は, 各成分  $\{P_{i,k}\}_{k \geq 1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が, それぞれ  $P_i$  に収束する部分列となる. (このような論法を, 対角線論法といい, 様々な場面で応用される極めて重要な証明手法である.) したがって,  $\{P_k\}_{k \geq 1}$  の部分列  $\{P_{k_l}\}_{l \geq 1}$  は, 点  $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  に収束する.  $\square$

これが, 公理 5 の拡張された形であり, ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理と呼ぶ.

有界な閉集合のことを, 有界閉集合と呼ぶ. 有界閉集合  $E$  では, 定理 3 と定理 4 から,  $E$  から取り出した点列は,  $E$  に収束する部分列を必ず含むことが言える. この事実は極めて重要なので, 定理の形でまとめると,

**定理 5.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  が有界閉集合であるとき,  $\{P_n\}_{n \geq 1} \subset E$  となる任意の点列は,  $E$  に収束する部分列を含む.

*Proof.*  $E \subset \mathbb{R}^n$  が有界閉集合であれば,  $E$  は有界なので定理 4 から,  $\{P_n\}_{n \geq 1} \subset E$  となる任意の点列  $E$  は, 収束する部分列  $\{P_{n_k}\}_{k \geq 1}$  を含む. 更に, 収束する部分列の極限  $P$  は,  $E$  が閉集合なので定理 3 から  $P \in E$ . 以上より, 結論を得る.  $\square$

## Coffee Break No.13

Kentaro Nagahara

いくつか論理記号を紹介する．英語でいう “for all”，日本語でいえば「任意の」ということを，数学では  $\forall$  と書き， $\forall \varepsilon > 0$  と書けば，「任意の正数  $\varepsilon$ 」という意味になる．また，英語でいう “there exists”，日本語でいえば「存在する」ということを，数学では  $\exists$  と書き， $\exists \delta > 0$  と書けば，「ある正数  $\delta$  が存在する」という意味になる．

また，数学ではよく英語やラテン語を省略した単語を用いる．英語の省略形でよく用いられるのは，日本語でいう「このような」という意味の “such that” のことを，“s.t.” と書いたり，「一般性を失わない」という意味の “without loss of generality” のことを，“w.l.o.g.” と書いたりする．このほかにも，昔からの慣例でラテン語を省略した単語を用いることも多い．日本語でいう「すなわち」の意味である “that is.” のことを，ラテン語では “id est” というが，これを省略して，“i.e.” と書く．このほかにも，“For example” のことをラテン語では “exempli gratia” といい，これを略して “e.g.” と書いたりする．よく日本の中高生が使っている，“Q.E.D.” などは，ラテン語の “quod erat demonstrandum” から来ている．英語での意味は，“That which was to have been proved.” であり，海外の人からは，“Traditionally placed at the end of proofs, the Q.E.D. is now usually indicated by a small square. A few students have clung to use of the traditional letters, in the hope they might be interpreted as “quite elegantly done.” ” などと言われているようである．おそらく古い時代に日本がこの “Q.E.D.” を輸入して，それをずっと使い続けているのだろうが，海外の人に数学の証明を披露する際に “Q.E.D.” などと書いてしまつては，ひょっとすると笑われてしまう．証明の終わりは，□ でよい．

No.1 で紹介した距離空間  $(X, d)$  に属する点列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  が  $\alpha$  に収束するという定義を，数学的な言葉に直すと， $\forall \varepsilon > 0$  に対し， $\exists N \in \mathbb{N}$ , s.t.  $\forall n > N$  に対して， $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ，ということになる．慣れてくると，論理的には，最初に何でも良いので正数  $\varepsilon$  があり， $\varepsilon$  に対して  $N \in \mathbb{N}$  が存在して， $\varepsilon$  と  $N$  に対して  $n > N$  が定まり，次の命題  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$  が成り立つ．となるのである．これを明瞭にし，言語的な部分を完全に排除した形で書くと，

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \left( \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \exists N \in \mathbb{N} \left( \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon) \right) \right) \right)$$

となる．なお， $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  である．また，括弧は依存関係を表し，括弧内の要素は，括弧外の要素に依存する．日本語に改めて直すと，ある実数  $\alpha$  が存在し，それに対して任意の正数  $\varepsilon$  を取ると，それに対してある自然数  $N$  が存在し，それに対して任意の自然数  $n$  が取れ，それに対して  $n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$  が成り立つ．ということになる．こうすると一切，日本語の表現に依存する不明瞭なところがないが，あまりにも機械的で，初めて見ると面くらってしまう．しかし，これに慣れると，一様連続などの否定も機械的に作れることになる．

多くの文字がかかわる命題の否定を作るには，文字にかかっている論理記号  $\forall$  と  $\exists$  をすべて交換し，命題を否定すればよい．すればよい．すなわち，

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \left( \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \exists N \in \mathbb{N} \left( \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon) \right) \right) \right)$$

の否定は，

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \left( \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \forall N \in \mathbb{N} \left( \exists n \in \mathbb{N} \neg (n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon) \right) \right) \right)$$

と表される．ここで  $\neg P$  は命題  $P$  の否定を表す記号であり，高校の教科書ではよく  $\bar{P}$  で表しているものであるが，集合  $E$  の境界点をすべて含めた集合  $\bar{E}$  と間違えてしまうので，論理記号学ではこの記号を導入してい

る。二つの命題  $P, Q$  に対し、 $P \Rightarrow Q$  は、「 $P$  ならば  $Q$ 」という一つの命題である。なお、命題  $P \Rightarrow Q$  のことを、論理記号では  $P \rightarrow Q$  と書く。論理的な部分を扱うときはこの記号を用いることにするが、矢印の太さが変わっただけで、何か別のものを表しているわけではないので安心されたい。 $P \rightarrow Q$  を、日本語など言語的な部分を排して数学的に定義しよう。

**定義 12.** 命題  $P$  が真であることを 1、偽であることを 0 で表す。命題  $P, Q$  が与えられている時、命題  $P, Q$  の真偽に応じて、命題  $P \rightarrow Q$  を次のように定義する。

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 0   | 0   | 1                 |

この表の見方であるが、例えば 1 列目は、命題  $P$  が真 ( $= 1$ )、命題  $Q$  も真 ( $= 1$ ) であるとき、命題  $P \rightarrow Q$  は真 ( $= 1$ )、と読む。これが数学的な  $P \rightarrow Q$  の定義であるので、日本語的な感覚で捉えて混乱しないように。定義からわかるとおり、 $P$  が偽であれば、 $P$  ならば  $Q$  は常に真である。字面だけを眺めると不思議なように思えるかもしれないが、そう定義すればうまくいく。人によってはこれが確かに自然な定義だと思われるかもしれない。

命題  $P$  の真偽と、それを否定した命題  $\neg P$  の真偽について、その対応を表にまとめると次のようになる。

| $P$ | $\neg P$ |
|-----|----------|
| 1   | 0        |
| 0   | 1        |

また、2 つの命題  $P$  と  $Q$  に対して、 $P$  かつ  $Q$  を  $P \wedge Q$  で表し、次のように定義する。

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 0   | 0   | 0            |

これを用いれば、命題  $P \rightarrow Q$  の否定  $\neg(P \rightarrow Q)$  が、次のように計算できる。

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ | $\neg(P \rightarrow Q)$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------------|
| 1   | 1   | 1                 | 0                       |
| 1   | 0   | 0                 | 1                       |
| 0   | 1   | 1                 | 0                       |
| 0   | 0   | 1                 | 0                       |

また、 $P \wedge \neg Q$  を計算すると、

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $P \wedge \neg Q$ |
|-----|-----|----------|-------------------|
| 1   | 1   | 0        | 0                 |
| 1   | 0   | 1        | 1                 |
| 0   | 1   | 0        | 0                 |
| 0   | 0   | 1        | 0                 |

したがって、 $\neg(P \rightarrow Q)$  と  $P \wedge \neg Q$  の真偽が一致するため、この二つの命題は同値である。よって、先ほどの命題は

$$\neg(n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon) \Leftrightarrow n > N \wedge |a_n - \alpha| \geq \varepsilon$$

と同値変形できる。よって、先ほど否定した命題は、

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \left( \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \forall N \in \mathbb{N} \left( \exists n \in \mathbb{N} (n > N \wedge |a_n - \alpha| \geq \varepsilon) \right) \right) \right)$$

となる。日本語に直せば、任意の実数  $\alpha$  に対し、ある  $\varepsilon > 0$  が存在し、それに対して任意の自然数  $N$  が取れ、それに対しある自然数  $n$  が存在し、 $n > N$  かつ  $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$  が成立する。これが、数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  がある実数  $\alpha$  に収束することの否定であり、数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  がどの実数にも収束しないことの定義となる。

## Coffee Break No.14

Kentaro Nagahara

いよいよ、1変数関数  $f(x)$  の世界から飛び出し、多変数関数を扱おう。点  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  のことを、 $D$  上の点  $x$  と呼ぶ。 $D$  上の各点  $x$  に対して、何らかの実数  $f(x)$  が対応しているとき、 $D$  上の関数  $f$  が与えられたという。 $D \subset \mathbb{R}^2$  の場合、 $D$  上の関数  $f = f(x) = f(x_1, x_2)$  を2変数関数と呼び、 $D \subset \mathbb{R}^n$  の場合、 $D$  上の関数  $f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  を  $n$  変数関数という。

多変数関数についても、関数の連続性が1変数関数の時と同様に定義できる。

**定義 13.**  $f$  を  $D \subset \mathbb{R}^n$  上定義された関数とする。 $\forall \varepsilon > 0$  に対し、ある  $\delta > 0$  が存在し、 $d(x, x_0) < \delta$  を満たす  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  をとると、

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成立するとき、関数  $f$  は  $x_0 \in D$  で連続であるという。

また、関数  $f$  が  $D \subset \mathbb{R}^n$  の任意の点  $x_0 \in D$  で連続であるとき、 $f$  は  $D$  上連続であるという。1変数関数の時と同様、 $f(x)$  が  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  で連続であることと、 $x \in D$  で点列連続性を持つことは同値である。すなわち、 $f(x)$  が  $x = x_0$  で連続であるための必要十分条件は、 $x_0$  に収束する任意の点列  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset D$  に対し、数列  $\{f(x_n)\}_{n \geq 1}$  が  $f(x_0)$  に収束することである。

*Proof.*  $(\Leftarrow)$   $f$  が  $x_0 \in D$  で連続であると仮定する。極限が  $x_0$  である任意の点列  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset D$  を取ると、点列の収束の定義1から、 $\delta$  に対してある自然数  $N$  で、 $n \geq N$  ならば  $d(x_n, x_0) < \delta$  を満たすものがとれる。したがって、 $f$  が連続であるから、 $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$  ( $n \geq N$ ) が成り立ち、点列連続性が言える。逆に、 $f$  が  $x_0 \in D$  で点列連続性を持つと仮定する。極限が  $x_0$  である任意の点列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  を取り、 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  の項を交互に並べてできる点列を  $\{x''_n\}_{n \geq 1}$  とおく。すなわち、 $x''_{2m-1} = x_m$ ,  $x''_{2m} = x'_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ )。仮定より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = f(x_0)$  であり、 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{x'_n\}_{n \geq 1}$  は  $\{x''_n\}_{n \geq 1}$  の部分列であったから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = f(x_0)$ 。さて、ここで、関数の連続性が成り立たないと仮定して、背理法で証明しよう。関数の連続性を否定する、つまり、

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \left( \forall x \in D \left( d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \right) \right)$$

を否定し、

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \forall \delta \in \mathbb{R}_+ \left( \exists x \in D \left( d(x, x_0) < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right) \right) \right)$$

ある正数  $\varepsilon_0$  が存在して、どんな（小さな） $\delta > 0$  に対しても、 $d(x, x_0) < \delta$  を満たす点  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$  で、 $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$  となるものが存在すると仮定する。各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\delta = \frac{1}{n}$  とおくと、 $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  を満たす実数  $x_n$  で、 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$  となるものが存在する。このようにして構成する点列  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  は、 $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$  より  $x_0$  に収束する。このとき、仮定より、 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  でなければならないが、これは  $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$  に矛盾する。□

$E \subset \mathbb{R}^n$  上の関数  $f$  について、点列連続性と連続の定義が同値であることから、一様連続性が多変数関数の場合でも成り立つ。

**定理 6.** 有界閉集合  $E \subset \mathbb{R}^n$  上の連続関数  $f$  は、 $E$  上一様連続である。すなわち、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、ある  $\delta > 0$  が存在し、 $d(x, x') < \delta$  を満たす任意の  $E$  上の点  $x, x'$  に対して、

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

が成立する。

なお、定理の後半は、 $\mathbb{R}^n$  における一様連続性の定義である。

*Proof.* 背理法で証明する。くどいようだが、背理法で示すときは、結論を否定すればよい。今回の場合は、一様連続が成り立たないと仮定すればよい。今回は、論理記号を学習したので、一様連続性の否定の命題を機械的に作るところから実践してみよう。一様連続性を、言語的な部分を排して定義すると、次のようになる。

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \left( \forall x' \in E \left( \forall x \in E \left( d(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \right) \right) \right) \right)$$

この命題を否定すると、

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \left( \forall \delta \in \mathbb{R}_+ \left( \exists x' \in E \left( \exists x \in E \left( d(x, x') < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon \right) \right) \right) \right)$$

これは、ある  $\varepsilon > 0$  に対しては、どんな  $\delta > 0$  を取っても、 $\delta$  に依存するある  $x' = x'(\delta) \in E$  と、 $d(x, x') < \delta$  を満たすある  $x = x(\delta) \in E$  を取ると、

$$|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$$

が成立する。という日本語になっている。見事に、1 変数の時に作った否定ができていないではないか。論理と言語的感覚が一致するかどうかは人によると思うが、とてもうまくできていると驚嘆する。残りは、1 変数の時と同じ流れを踏襲すればよい。今、仮定より、ある  $\varepsilon > 0$  をとると、それに対して任意の正数  $\delta$  がとれる。任意ということは何でもよいということなので、 $\delta = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とする。このとき、 $\delta = \frac{1}{n}$  に依存するある  $x' = x'(1/n) \in E$  と、 $d(x, x') < \frac{1}{n}$  を満たすある  $x = x(1/n) \in E$  が取れる。この  $x, x'$  の組は  $n$  に依存して決まるので、それぞれ  $x_n, x'_n$  と置くことにしよう。すると、点列  $\{x_n\}_{n \geq 1}, \{x'_n\}_{n \geq 1}$  は、有界閉集合  $E$  上の点列であるから、有界である。すなわち、ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理より、有界閉集合上の点列は収束部分列を含むから、ある部分列  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 1}$  で収束するものが存在する。この極限値を  $x_0$  とする。1 変数と同じように、この部分列と同じ添え字を持つ  $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 1}$  の部分列  $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 1}$  も、 $x_0$  に収束することを証明しよう。 $x_{n_k} \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であるから、 $d(x_{n_k}, x_0) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であり、添え字は  $n_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) なので、 $\frac{1}{n_k} \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) であることに注意すると、

$$d(x'_{n_k}, x_0) \leq d(x'_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0)$$

となる。したがって、 $x'_{n_k} \rightarrow x_0$  ( $k \rightarrow \infty$ )、すなわち  $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 1}$  も同じ  $x_0$  に収束することが示された。 $E$  上の関数  $f(x)$  は  $E$  上連続であったから、点列連続性を持ち、 $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  かつ  $f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$  となる。従って、 $f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) となるが、仮定により、ある  $\varepsilon > 0$  に対して、 $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$  が成立していないといけなないので、矛盾である。したがって、背理法により、関数  $f(x)$  が有界閉集合  $E$  上で連続ならば、 $f(x)$  は  $E$  上一様連続であることが示された。□

実は、これが言いたいがために、 $n$  次元 Euclid 空間を扱った。準備とは言い難い程度に突っ込んでしまったが、一様連続性を持つ関数は、その便利さゆえに理論的な部分を無視して扱うことが多く、このような機会にきちんとした背景も知ってほしい。

## Coffee Break No.15

Kentaro Nagahara

偏微分という概念を導入しよう.

関数  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は, 点  $P_0 = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n$  の近傍で定義されているものとする. 変数をどれか一つ, 例えば  $x_i \in \mathbb{R}$  だけ動かし, 他の変数はすべて点  $P_0$  の成分で止めるとしよう. i.e.,  $f(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, x_i, P_{i+1}, \dots, P_n)$  ( $x_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )). このとき,  $f$  は  $x_i$  の関数とみなすことができる. 本来は  $f$  は  $n$  変数関数であるが,  $n - 1$  個の変数を止めているので, 1 変数関数と同様にみなすことができる. これを形式的に  $\tilde{f}(x_i)$  と書くことにする.

**定義 14.**  $\tilde{f}(x_i)$  が点  $x_i = a$  において微分可能である時,  $f$  は  $P_0$  において,  $x_i$  に関して偏微分可能であるという. この微分係数を  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)$ , または  $f_{x_i}(P_0)$  と書き, これを点  $P_0$  における  $x_i$  に関する偏微分係数という. 数式で表せば

$$\begin{aligned} f_{x_i}(P_0) &= f_{x_i}(P_1, P_2, \dots, P_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i} f(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, x_i, P_{i+1}, \dots, P_n) \Big|_{x_i=P_i} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, x_i + h, P_{i+1}, \dots, P_n) - f(P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, x_i, P_{i+1}, \dots, P_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x_i + h) - \tilde{f}(x_i)}{h} \end{aligned}$$

となる.

関数  $f(x)$  が,  $D \subset \mathbb{R}^n$  の各点  $x$  で  $x_i$  に関して偏微分可能であるとき, 点  $x$  における  $x_i$  に関する偏微分係数  $f_{x_i}(x)$  は  $D$  上の関数となる. これを,  $x_i$  に関する  $f(x)$  の偏導関数と呼び, 次のようにあらわす.

$$f_{x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

もちろん, 偏導関数は,  $n$  個の変数  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) について同様に定義される. 偏導関数を求めることを, 偏微分する, という. 例えば, 2 変数関数  $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$  を偏微分してみよう.  $(x, y) \neq (0, 0)$  のとき,  $x$  について偏微分すると,  $y$  は止められている, すなわち定数とみなしてよいので, 積の微分法より,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$y$  について偏微分すると,  $x$  は定数とみなしてよいので,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となる.  $(x, y) = (0, 0)$  のときは,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

となる.

## Coffee Break No.16

Kentaro Nagahara

全微分という概念を導入しよう.

関数  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は, 点  $P_0 = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n$  の近傍で定義されているものとする.  
適当な定数  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に対して,

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(P_1 + h_1, P_2 + h_2, \dots, P_n + h_n) - f(P_1, P_2, \dots, P_n) \\ &= A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + \varepsilon(h) \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}\end{aligned}$$

(ただし,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ ) と置くとき,  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  (ただし,  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ ,  $0$  が  $n$  個) となるならば,  $f$  は点  $P_0$  で全微分可能であるという. このとき,  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta f = 0$  であるから,  $f$  は点  $P_0$  で連続である. 次に,  $h$  の一つの成分  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 以外の  $h_j = 0$  ( $j \neq i$ ) としてみれば,  $f_{x_i}(P_0) = A_i$  を得る. よって, 全微分可能であれば, 偏微分可能である.

これを用いて, 多変数関数の場合の合成関数の微分法を考えることができる. 簡単のために, 2 変数関数で考えよう. 多変数になっても議論は同じである.

**定理 7** (合成関数の微分法).  $f(x)$  は,  $D \subset \mathbb{R}^2$  で全微分可能とする.  $x = x(t), y = y(t)$  は, 区間  $I \in \mathbb{R}$  で微分可能で, 各  $t$  につき, 点  $(x(t), y(t))$  は  $D$  に含まれるとする. このとき, 合成関数  $f(x(t), y(t))$  は  $I$  上微分可能で, 次の式が成り立つ.

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}$$

これは, 次のように表すこともできる.

$$\frac{df}{dt} = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

*Proof.*  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = (x'(t) + \varepsilon_1)\Delta t$ ,  $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) = (y'(t) + \varepsilon_2)\Delta t$  と置ける.

**注意 7.** 復習になるが, 1 変数関数  $f(x)$  の微分は,  $x$  を固定した時,

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (f'(x) + \varepsilon(\Delta x))\Delta x$$

の両辺を  $\Delta x$  で割った

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$$

において,  $\Delta x \rightarrow 0$  のとき,  $\Delta x$  に関する関数  $\varepsilon$  (一次近似との誤差) が  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$  となるとき, 微分可能であるといい, 定数  $f'(x)$  を,  $f$  の  $x$  における微分というのであった.

各  $x, y$  は  $I$  上微分可能なので,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) が成り立つ. 全微分の定義を 2 変数に書き直した

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

の  $f_x \Delta x + f_y \Delta y$  に, 上記の式を代入して,

$$\Delta f = f_x(x'(t) + \varepsilon_1)\Delta t + f_y(y'(t) + \varepsilon_2)\Delta t + \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

この両辺を  $\Delta t$  で割ると,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta t} &= f_x(x'(t) + \varepsilon_1) + f_y(y'(t) + \varepsilon_2) + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \therefore \frac{\Delta f}{\Delta t} - f_x x'(t) - f_y y'(t) &= f_x \varepsilon_1 + f_y \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\end{aligned}\quad (18)$$

$\Delta t \rightarrow 0$  のとき,  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ . また,  $f$  は全微分可能であったから,  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき,  $\varepsilon \rightarrow 0$  となる. ここで,  $\Delta t > 0$  のとき,

$$\frac{1}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

であることから,

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \rightarrow \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \quad (\Delta t \rightarrow 0 \ (\Delta t > 0))$$

よって,

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0 \ (\Delta t > 0))$$

が得られる.  $\Delta t < 0$  となっている場合でも,  $-\Delta t > 0$  なので,

$$-\frac{\varepsilon}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0 \ (\Delta t < 0))$$

となり, 両方合わせて,  $\Delta t \rightarrow 0$  のとき

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0)$$

となることがわかる. したがって, (18) で  $\Delta t \rightarrow 0$  とすると, 右辺が 0 に収束する. ゆえに,

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x x'(t) + f_y y'(t)$$

□

これが, 多変数関数の合成関数の微分法の基本となる定理である.

## Coffee Break No.17

Kentarō Nagahara

実は、高校では1変数関数の積分の定義すらともに扱っていないが、ここでは一気に多変数関数の積分を定義しよう。

$n$ 次元Euclid空間の部分集合  $R \subset \mathbb{R}^n$  が、

$$R = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

(ただし、 $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$  とする.) で与えられるとき、 $R$  を閉方体という。閉方体  $R$  上定義された有界な関数  $f(x)$  を積分しよう。

**定義 15** ( $n$ 次元Euclid空間内の閉方体上のRiemann積分).  $R$  を、各座標軸に平行な直線群によって小閉方体群に分ける分割  $\Delta$  を考える。

$$\Delta = \begin{cases} a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < x_{1,2} < \dots < x_{1,m_1} = b_1 \\ a_2 = x_{2,0} < x_{2,1} < x_{2,2} < \dots < x_{2,m_2} = b_2 \\ \vdots \\ a_n = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,m_n} = b_n \end{cases}$$

(ただし、 $m_i \in \mathbb{N}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )) として、

$$\begin{aligned} \Delta x_{i,j} &= x_{i,j} - x_{i,j-1} \quad (j \in \mathbb{N}, 1 < j < m_i, i = 1, 2, \dots, n) \\ |\Delta| &= \max\{\Delta x_{i,j} \mid j \in \mathbb{N}, 1 < j < m_i, i = 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

とおく。更に、各小閉方体

$$\Delta_{c_1, c_2, \dots, c_n} = \{x \in R \subset \mathbb{R}^n \mid x_{i, c_i - 1} \leq x_i \leq x_{i, c_i} \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

から、任意に点  $\{P_{c_1, c_2, \dots, c_n}\} \in \Delta_{c_1, c_2, \dots, c_n}$  を取り出し、和

$$R[\Delta; \{P_{c_1, c_2, \dots, c_n}\}] = \sum_{\Delta} f(P_{c_1, c_2, \dots, c_n}) \Delta x_{1, c_1} \Delta x_{2, c_2} \cdots \Delta x_{n, c_n}$$

但し、

$$\sum_{\Delta} = \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ 1 \leq c_2 \leq m_2 \\ \vdots \\ 1 \leq c_n \leq m_n}}$$

をつくる。これを、 $\Delta$ ,  $\{P_{c_1, c_2, \dots, c_n}\}$  に関する  $f$  のリーマン和 (**Riemann's sum**) という。ある定数  $J$  があって、分割  $\Delta$  を細かくしていくと、分割  $\Delta$  の仕方、および  $\{P_{c_1, c_2, \dots, c_n}\}$  の取り方に無関係に、 $R[\Delta; \{P_{c_1, c_2, \dots, c_n}\}]$  の値が  $J$  に近づくならば、すなわち

$$|\Delta| \rightarrow 0 \text{ のとき, } R[\Delta; \{P_{c_1, c_2, \dots, c_n}\}] \rightarrow J$$

ならば、 $f$  は  $R$  上で積分可能 (または、可積) であるといい、値  $J$  を

$$\int_R f(x) dx$$

で表す。また、 $x$  は  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  であるから、より厳密に、

$$\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

と書くこともある。

このように定義した積分は、そのままでは計算しづらい。そこで、関数  $f$  が閉方体  $R \subset \mathbb{R}^n$  上で積分可能であれば、それぞれ別々に積分できる。すなわち、

$$\int_R f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n$$

となることを証明しよう。ここで、

$$\int_{a_i}^{b_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

は、偏微分と同じで、関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の変数  $x_i \in \mathbb{R}$  のみを動かして計算することを意味する。そのため、この計算自体は、高校生でやっている積分と何ら変わりがない。

*Proof.* 分割の記号は、定義で用いたものと同様とする。また、各小閉方体

$$\Delta_{c_1, c_2, \dots, c_n} = \{x \in R \subset \mathbb{R}^n \mid x_{i, c_{i-1}} \leq x_i \leq x_{i, c_i} \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

は、有界閉集合である。 $\mathbb{R}^n$  でも、ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理と、連続性と点列連続性が同値であるため、有界閉集合上の連続関数は最大値、最小値を取る。各小閉方体  $\Delta_{c_1, c_2, \dots, c_n}$  上の連続関数  $f(x)$  の最大値を  $\tilde{M}_{c_1, c_2, \dots, c_n}$ 、最小値を  $\tilde{m}_{c_1, c_2, \dots, c_n}$  としよう。更に、

$$F_{n-1}(x_n) = \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) \cdots dx_{n-1}$$

とおく。このとき、定義から

$$\begin{aligned} \int_R f(x) dx &= \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ 1 \leq c_2 \leq m_2 \\ \vdots \\ 1 \leq c_n \leq m_n}} f(P_{c_1, c_2, \dots, c_n}) \Delta x_{1, c_1} \Delta x_{2, c_2} \cdots \Delta x_{n, c_n} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \sum_{c_n=1}^{m_n} \left( \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq c_{n-1} \leq m_{n-1}}} \tilde{m}_{c_1, c_2, \dots, c_n} \Delta x_{1, c_1} \cdots \Delta x_{n-1, c_{n-1}} \right) \Delta x_{n, c_n} \\ \leq \sum_{c_n=1}^{m_n} F_{n-1}(x_n) \Delta x_{n, c_n} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{c_n=1}^{m_n} \left( \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq c_{n-1} \leq m_{n-1}}} \tilde{M}_{c_1, c_2, \dots, c_n} \Delta x_{1, c_1} \cdots \Delta x_{n-1, c_{n-1}} \right) \Delta x_{n, c_n}$$

が成り立ち、 $f$  は積分可能なので、 $|\Delta| \rightarrow 0$  とすれば、

$$\sum_{c_n=1}^{m_n} \left( \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq c_{n-1} \leq m_{n-1}}} \tilde{m}_{c_1, c_2, \dots, c_n} \Delta x_{1, c_1} \cdots \Delta x_{n-1, c_{n-1}} \right) \Delta x_{n, c_n} \rightarrow \int_R f(x) dx$$

$$\sum_{c_n=1}^{m_n} \left( \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq c_{n-1} \leq m_{n-1}}} \tilde{M}_{c_1, c_2, \dots, c_n} \Delta x_{1, c_1} \cdots \Delta x_{n-1, c_{n-1}} \right) \Delta x_{n, c_n} \rightarrow \int_R f(x) dx$$

が成り立つ。したがって、上の不等式は、

$$\int_R f(x) dx \leq \int_{a_n}^{b_n} F_{n-1}(x_n) dx_n \leq \int_R f(x) dx$$

となり、

$$\int_R f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} F_{n-1}(x_n) dx_n$$

である。次に、

$$F_{n-2}(x_{n-1}) = \int_{a_{n-2}}^{b_{n-2}} \cdots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) \cdots dx_{n-2}$$

といて、不等式、

$$\sum_{c_{n-1}=1}^{m_{n-1}} \left( \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq c_{n-1} \leq m_{n-1}}} \tilde{m}_{c_1, c_2, \dots, c_n} \Delta x_{1, c_1} \cdots \Delta x_{n-2, c_{n-2}} \right) \Delta x_{n-1, c_{n-1}}$$

$$\leq \sum_{c_{n-1}=1}^{m_{n-1}} F_{n-2}(x_{n-1}) \Delta x_{n-1, c_{n-1}}$$

$$\leq \sum_{c_{n-1}=1}^{m_{n-1}} \left( \sum_{\substack{1 \leq c_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 1 \leq c_{n-2} \leq m_{n-2}}} \tilde{M}_{c_1, c_2, \dots, c_n} \Delta x_{1, c_1} \cdots \Delta x_{n-2, c_{n-2}} \right) \Delta x_{n-1, c_{n-1}}$$

を考えて、これを

$$F_{n-1}(x_n) = \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \right) \cdots dx_{n-1}$$

に対して適用すれば、

$$\int_R f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} F_{n-1}(x_n) dx_{n-1} \right) dx_n$$

となり、残りは帰納的に証明できる。

□

## Coffee Break No.18

Kentaro Nagahara

いよいよ本題である.

**定理 8.** 2 階の非線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + f(t, x) = 0 \quad (19)$$

において,  $f(x, t)$  は  $a \leq t \leq b$ ,  $|x| < \infty$  で  $t, x$  に関し連続であるとする.

1. 境界条件  $x(a) = x(b) = 0$  を満たす (19) の解  $x = x(t)$  は

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, x(s)) ds \quad (20)$$

を満たす. ただし,

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(b-t)(s-a)}{b-a} & \text{if } a \leq s \leq t \leq b \\ \frac{(b-s)(t-a)}{b-a} & \text{if } a \leq t \leq s \leq b \end{cases} \quad (21)$$

2.  $f(x, t)$  が任意の  $x', x''$  に対して  $a \leq t \leq b$  で

$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leq K|x' - x''| \quad (22)$$

を満たし,

$$0 < b - a < \sqrt{\frac{8}{K}} \quad (23)$$

であるときは,  $x_0 = 0$ ,

$$x_{n+1}(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, x_n(s)) ds \quad (24)$$

で定義される  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  は  $[a, b]$  で一様収束する.

この微分方程式 (19) は, 2 次の導関数を含むので **2 階**の非線形常微分方程式である. 一般に, 常微分方程式は 1. のような, **積分方程式**へ帰着させるのが常識である.

境界条件  $x(a) = x(b) = 0$  を満たす微分方程式 (19) の解  $x(t)$  に対して, 部分積分を行って,

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t, s) f(s, x(s)) ds &= - \int_a^b G(t, s) \frac{d^2 x(s)}{ds^2} ds = - \int_a^t G(t, s) \frac{d^2 x(s)}{ds^2} ds - \int_t^b G(t, s) \frac{d^2 x(s)}{ds^2} ds \\ &= - \int_a^t \frac{(b-t)(s-a)}{b-a} \frac{d^2 x(s)}{ds^2} ds - \int_t^b \frac{(b-s)(t-a)}{b-a} \frac{d^2 x(s)}{ds^2} ds \\ &= - \left[ \frac{(b-t)(s-a)}{b-a} \frac{dx(s)}{ds} \right]_{s=a}^{s=t} + \int_a^t \frac{b-t}{b-a} \frac{dx(s)}{ds} ds - \left[ \frac{(b-s)(t-a)}{b-a} \frac{dx(s)}{ds} \right]_{s=t}^{s=b} - \int_t^b \frac{(t-a)}{b-a} \frac{dx(s)}{ds} ds \\ &= \int_a^t \frac{b-t}{b-a} \frac{dx(s)}{ds} ds - \int_t^b \frac{(t-a)}{b-a} \frac{dx(s)}{ds} ds = \frac{b-t}{b-a} (x(t) - x(a)) - \frac{t-a}{b-a} (x(b) - x(t)) \\ &= \left( \frac{b-t}{b-a} + \frac{t-a}{b-a} \right) x(t) = x(t) \end{aligned}$$

が成立し, (20) を得る. なお,  $G(a, s) = G(b, s) = 0$  が成立するから, 積分方程式 (20) の解  $x(t)$  は仮定した境界条件  $x(a) = x(b) = 0$  を満たすことも確かめられる.

この定理で直接言及はされていないが, 逆に, 積分方程式 (20) の解  $x(t)$  が, 微分方程式 (19) の解であることを証明することもできる. これを証明するためには, 次の公式を用いれば良い.

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} g(t, s) ds = \frac{d}{dt} \varphi(t) g(t, \varphi(t)) - \frac{d}{dt} \psi(t) g(t, \psi(t)) + \int_{\psi(t)}^{\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial t} g(t, s) ds \quad (25)$$

この公式は, 2 変数関数の変数  $x, y$  が  $t$  の関数  $x = x(t), y = y(t)$  で表されているときの合成関数の微分法

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

のみで証明できる.

公式 (20) の両辺を  $t$  で微分すると, 公式 (25) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^b G(t, s) f(s, x(s)) ds \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^t G(t, s) f(s, x(s)) ds + \int_t^b G(t, s) f(s, x(s)) ds \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t G(t, s) f(s, x(s)) ds - \frac{d}{dt} \int_b^t G(t, s) f(s, x(s)) ds \\ &= G(t, t) f(t, x(t)) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) f(s, x(s)) ds - \left\{ G(t, t) f(t, x(t)) + \int_b^t \frac{\partial}{\partial t} G(t, s) f(s, x(s)) ds \right\} \\ &= \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} \frac{(b-t)(s-a)}{b-a} f(s, x(s)) ds - \int_b^t \frac{\partial}{\partial t} \frac{(b-s)(t-a)}{b-a} f(s, x(s)) ds \\ &= \int_a^t \frac{a-s}{b-a} f(s, x(s)) ds - \int_b^t \frac{b-s}{b-a} f(s, x(s)) ds \\ &= \frac{a}{b-a} \int_a^t f(s, x(s)) ds - \frac{b}{b-a} \int_b^t f(s, x(s)) ds + \int_a^b \frac{s}{b-a} f(s, x(s)) ds \end{aligned} \quad (26)$$

(26) の両辺をさらに  $t$  で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{a}{b-a} \int_a^t f(s, x(s)) ds - \frac{b}{b-a} \int_b^t f(s, x(s)) ds + \int_a^b \frac{s}{b-a} f(s, x(s)) ds \right\} \\ &= \frac{a}{b-a} f(t, x(t)) - \frac{b}{b-a} f(t, x(t)) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \frac{s}{b-a} f(s, x(s)) ds \\ &= \left( \frac{a}{b-a} - \frac{b}{b-a} \right) f(t, x(t)) = -f(t, x(t)) \end{aligned} \quad (27)$$

が成立し, 積分方程式 (20) の解  $x(t)$  が微分方程式 (19) の解であることを確かめることができた. なお,  $G(a, s) = G(b, s) = 0$  が成立するから, 微分方程式 (19) の解  $x(t)$  は境界条件  $x(a) = x(b) = 0$  を満たす. このことから, 境界条件  $x(a) = x(b) = 0$  を課した微分方程式 (19) を解くことと, 積分方程式 (20) を解くことは同値である. このように, 境界条件が課された微分方程式の問題を, **境界値問題**という. また, ここで出てきた関数  $G(t, s)$  を, この境界値問題の**グリーン (Green) 関数**という.

No.8, No.9 で,  $C[a, b]$  上に距離  $d$  を  $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$  と定義すると, 完備な距離空間になることを確かめた. 完備な距離空間では, 逐次近似法を適用することができる. これを用いて, 後半の証明をすることにしよう.

**命題 5.**  $C[a, b]$  上に距離  $d$  を  $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$  と定義する. このとき, 完備な距離空間  $(C[a, b], d)$  における点列収束とは, 関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  が  $[a, b]$  上一様収束することと同値である.

*Proof.*  $(\implies)$   $(C[a, b], d)$  の点列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  がある点  $f$  に点列収束すると仮定する. このとき, 定義から, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある  $N$  が存在して,  $n > N$  に対して,

$$d(f_n, f) < \varepsilon$$

が成立する. 一方で, 定義から  $d(f_n, f) = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$  であり,  $\sup$  の定義から, 任意の  $x \in [a, b]$  に対して,  $|f_n(x) - f(x)| < \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$  である. 従って, 任意の  $x \in [a, b]$  に対して,

$$|f_n(x) - f(x)| < \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = d(f_n, f) < \varepsilon$$

となるので, 関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  は関数  $f$  に一様収束する.

$(\impliedby)$  関数列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  が  $[a, b]$  上関数  $f$  に一様収束すると仮定する. すなわち定義から, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, ある自然数  $N$  が存在して, 任意の  $n > N$  をとるとき, 任意の  $x \in [a, b]$  に対して,  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  が成立する. また, 閉区間  $[a, b]$  上では連続関数  $|f_n - f|$  は最大値, および最小値を取る. 従って, 最大値を取る点  $x_m \in [a, b]$  が存在し,

$$|f_n(x_m) - f(x_m)| = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$$

を満たす. 仮定から,  $|f_n(x_m) - f(x_m)| < \varepsilon$  が成立するので,

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_m) - f(x_m)| < \varepsilon$$

となり,  $(C[a, b], d)$  の点列  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  は点  $f$  に点列収束することが示された.  $\square$

集合  $C[a, b]$  は, 距離  $d$  の入れ方によっては完備になったり, ならなかったりする. たとえば, 距離  $d$  を

$$\tilde{d}(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$$

とすると, これは完備な距離空間にならない. 距離空間  $(C[a, b], \tilde{d})$  は完備ではないので, そのコーシー列の極限 (不連続関数) を付け加えて満席にし, 完備な距離空間を作ることができる. このような空間を Lebesgue 空間といい, 特に  $L^2[a, b]$  とあらわす. いよいよ本性をさらけ出して, これについてくどくどと説明したくなるが, 本筋ではないので割愛する. このことは, 次の話題としてじっくり触れたいものである.

このように,  $C[a, b]$  などの関数空間は, 適切な距離を入れて, 完備にすることによって, ようやく扱いやすい距離空間になるといえる.  $(C[a, b], d)$  を考え,  $C([a, b])$  の点  $x$  に対して,  $C[a, b]$  の点  $Tx$  を対応させたい. ここでは天下り的に,  $[a, b]$  上の連続関数  $x(t) \in C[a, b]$  に対して,  $t \in [a, b]$  における値  $(Tx)(t)$  を

$$(Tx)(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, x(s)) ds$$

で定義する. このとき,  $Tx \in C[a, b]$  となることを証明しよう. 一般に, 1 変数の連続関数  $f(x)$  を積分した関数  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  は,  $x$  に関して一回微分可能で導関数 ( $= f(x)$ ) も連続になるが, 2 変数関数においては積分していない変数に関する連続性は調べないとわからないのである.

*Proof.*  $t_0 \in [a, b]$  とし,  $(Tx)(t)$  は  $t = t_0$  で連続であることを示す.  $x(t) \in C[a, b]$  であったので, 定理 1 から  $x(t)$  は区間  $[a, b]$  上で最大値  $M = \sup_{t \in [a, b]} x(t)$ , 最小値  $m = \inf_{t \in [a, b]} x(t)$  を取る. ここで, 実数の部分集合  $S$  に対して, 常に  $\sup S, \inf S$  は存在し,  $S$  に最大値  $\max S$ , 最小値  $\min S$  が存在するときは,  $\sup S = \max S$ ,  $\inf S = \min S$  であったことに注意しよう. 集合  $D$  を  $D = \{(t, s) \mid a \leq t \leq b, m \leq s \leq M\}$  と定義する. 2 変数関数  $G(t, s)f(s, x(s))$  は  $D$  上一様連続であったので, 任意の正数  $\varepsilon$  に対して,

$$|(Tx)(t) - (Tx)(t_0)| = \int_a^b \{G(t, s)f(s, x(s)) - G(t_0, s)f(s, x(s))\} ds \leq \varepsilon(b-a)$$

が成り立つ. よって,  $t \rightarrow t_0$  としたとき,  $(Tx)(t) \rightarrow (Tx)(t_0)$  である. したがって,  $Tx \in C[a, b]$  □

また,  $f(x)$  が (22) を満たすとき, Lipschitz 条件を満たすといい,  $K$  を写像のときと同様 Lipschitz 定数という. ここで,

$$\int_a^b G(t, s) ds = \int_a^t \frac{(b-t)(s-a)}{b-a} ds + \int_t^b \frac{(t-a)(b-s)}{b-a} ds = \frac{(t-a)(b-t)}{2} \leq \frac{(b-a)^2}{8}$$

が成り立ち, これが写像  $T$  の Lipschitz 定数の要点である.  $C[a, b]$  の任意の 2 元  $x, y$  に対して,  $T$  の定義と

$$(Tx)(t) - (Ty)(t) \leq K \int_a^b G(t, s)|x(s) - y(s)| ds \leq Kd(x, y) \int_a^b G(t, s) ds$$

より, 上述の計算結果を代入して,

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{(b-a)^2 K}{8} d(x, y)$$

を得て, 仮定  $0 < b-a < \sqrt{\frac{8}{K}}$  の条件下では,  $T$  は縮小写像である. したがって逐次近似法により, 不動点が一意的に存在し, 不動点  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  は

$$x^*(t) = \int_a^b G(t, s)f(s, x^*(s)) ds$$

を満たす. よって, 不動点は (20) を満たし, これと (19) の解

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + f(t, x) = 0$$

は一致するから, (19) の解は一意的に存在し, しかも逐次近似法により (具体的にではないが) 求められることが分かった.

## Coffee Break No.19

Kentaro Nagahara

高校でベクトルを習うが，なにもベクトルは「矢印（これを幾何学的ベクトルという）」に限って使われるわけではない．ここでは，ベクトルと呼ばれるものの厳密な定義をしよう．