レポート問題 模範解答

(模範，という程のものでもない。もっとエレガントな証明を思い付いたら，教えてほしい。また，非常に細かい部分まで気にして証明しているので，精密な議論になっている。)

問題1

1 $\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \Rightarrow x^2 > 0)$

とは，「任意の実数 x について，$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ が成り立つ」という文章である。これは真である。

(∵) 一般に，実数の演算の公理から，

$\forall a, \forall b \in \mathbb{R},\quad 0 \leqq a < b$ に対して

$\forall c \in \mathbb{R}\quad c > 0$ を取ると，

$ac < bc$ が成立する。

従って $x > 0$ に対しても $x^2 > 0$。□

2 $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0)$

とは，「任意の実数 x について，$x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ が成り立つ」という文章であるが，これは偽である。

(∵) 反例を1つでもあげれば，命題の否定

$\exists x \in \mathbb{R}\ ((x^2 > 0) \wedge (x \leqq 0))$ が成立。よって，命題は偽である。例えば，$x = -1 < 0$ とすれば，$x^2 = (-1)^2 = 1 > 0$ かつ $x < 0$ より，命題の否定が真。よって，命題は偽。

問題2　命題の否定を作るには、

$$\neg\left(\forall x\,(\text{条件})\,(P(x))\right) \iff \exists x\,(\text{条件})\,(\neg P(x))$$

$$\neg\left(\exists x\,(\text{条件})\,(P(x))\right) \iff \forall x\,(\text{条件})\,(\neg P(x))$$

とすれば良い。

(注)　命題の否定が何故このようにして作られるのかを考えると、厳密な証明はかなり難しいことに気がつく。

日本語に平たく直せば、$\forall x$ (条件) $(P(x))$ は、

「条件を満たす任意の x に対して、述語 $P(x)$ が成立する。」

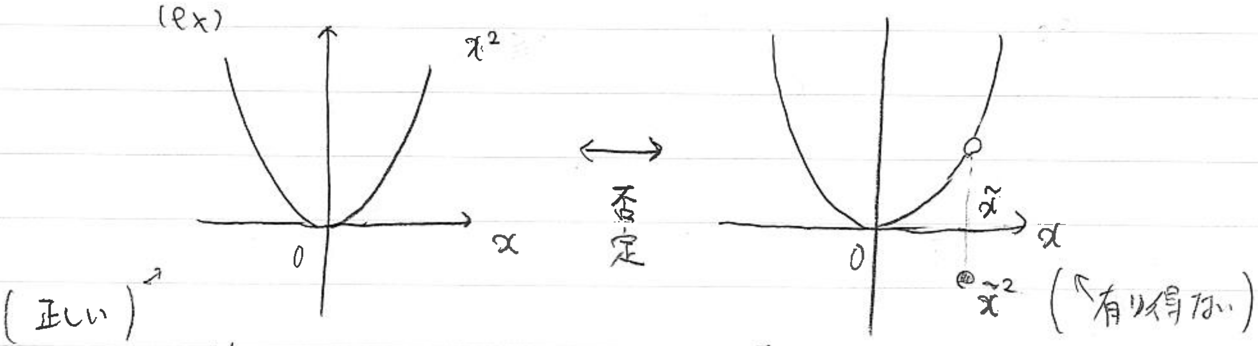
この否定は、

「条件を満たす任意の x に対して、述語 $P(x)$ が成立」しない。

すなわち、どれか1つでも、条件を満たしているのに、述語 $P(x)$ が成立しない x が存在すれば、上の文章は正しい。

よって、「条件を満たす x で、述語 $P(x)$ が成立しないものが、1つ以上存在する。」

というのが、$\exists x$ (条件) $(\neg P(x))$ である。



$\forall x\in\mathbb{R}\ (x^2\geqq 0)$; 真　　　$\exists x\in\mathbb{R}\ (x^2<0)$; 偽

$$^{\forall}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(^{\exists}N\in\mathbb{N}\left(^{\forall}n\in\mathbb{N}\left(n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)\right)\right)$$

の否定は，　(注) $\mathbb{R}_+ := \{x\in\mathbb{R} : x>0\}$：正の実数全体

$$\neg\left(^{\forall}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(^{\exists}N\in\mathbb{N}\left(^{\forall}n\in\mathbb{N}\left(n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\ ^{\exists}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(\neg\left(^{\exists}N\in\mathbb{N}\left(^{\forall}n\in\mathbb{N}\left(n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\ ^{\exists}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(^{\forall}N\in\mathbb{N}\left(\neg\left(^{\forall}n\in\mathbb{N}\left(n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\ ^{\exists}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(^{\forall}N\in\mathbb{N}\left(^{\exists}n\in\mathbb{N}\left(\neg\left(n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)\right)\right)\right)$$

$P\Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ より，

$$\neg\left(n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \neg\left(\neg(n>N) \vee |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow (n>N)\wedge\neg\left(|a_n-\alpha|<\varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow (n>N)\wedge\left(|a_n-\alpha|\geqq\varepsilon\right).$$ 従って，

$$^{\exists}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(^{\forall}N\in\mathbb{N}\left(^{\exists}n\in\mathbb{N}\left((n>N)\wedge(|a_n-\alpha|\geqq\varepsilon)\right)\right)\right) \quad \square$$

(注) $$^{\exists}\alpha\in\mathbb{R}\left(^{\forall}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(^{\exists}N\in\mathbb{N}\left(^{\forall}n\in\mathbb{N}\left(n\geqq N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon\right)\right)\right)\right)$$

$\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が α に収束する

の否定は，

$$^{\forall}\alpha\in\mathbb{R}\left(^{\exists}\varepsilon\in\mathbb{R}_+\left(^{\forall}N\in\mathbb{N}\left(^{\exists}n\in\mathbb{N}\left((n\geqq N)\wedge(|a_n-\alpha|\geqq\varepsilon)\right)\right)\right)\right)$$

$\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ は，任意の実数 α に収束しない。すなわち，「どの実数 α にも限りなく近づくことはない。」

問題3. (1) $T \subset S \Rightarrow T^c \supset S^c$

(∵) $T \subset S$と仮定する。このとき、$x \in T \Rightarrow x \in S$。

従って、対偶を取ると、$x \notin S \Rightarrow x \notin T$

ここで、$S \cap S^c = \phi$, $S \cup S^c = X$ より

$$\begin{cases} x \notin S \Leftrightarrow x \in S^c \\ x \notin T \Leftrightarrow x \in T^c \end{cases}$$

が成り立つ。従って、

「$x \notin S \Rightarrow x \notin T$」

$\Leftrightarrow$「$x \in S^c \Rightarrow x \in T^c$」$\Leftrightarrow S^c \subset T^c$ □

(2) $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$

(∵)「$(S \cup T)^c \subset S^c \cap T^c$」かつ「$S^c \cap T^c \subset (S \cup T)^c$」

を示せばよい。

(i) $(S \cup T)^c \subset S^c \cap T^c$ を示す。

$^\forall x \in (S \cup T)^c$, 取る。このとき、

$(S \cup T) \cap (S \cup T)^c = \phi$, $(S \cup T) \cup (S \cup T)^c = X$ より

$x \in (S \cup T)^c \Leftrightarrow x \notin S \cup T$

~~$x \notin S \cup T \Leftrightarrow x \notin S$ かつ $x \notin T$ より~~

$x \notin S$ かつ $x \notin T \Leftrightarrow x \in S^c$ かつ $x \in T^c$ ~~$\Leftrightarrow x \in S^c \cap T^c$~~ //

(ii) $S^c \cap T^c \subset (S \cup T)^c$

${}^\forall x \in S^c \cap T^c$ を取る。このとき、

$x \in S^c \cap T^c \iff x \in S^c$ かつ $x \in T^c$

$\iff x \notin S$ かつ $x \notin T$

$\iff x \notin S \cup T$

$\iff x \in (S \cup T)^c$

となり $(S^c \cap T^c) \subset (S \cup T)^c$ が示された。

(注) (ii) は、$\Rightarrow$ のみ成立していれば示せる。

が、実はこの問題は上のように同値変形ができるので、

上述の (ii) の解答のみで $(S^c \cap T^c) = (S \cup T)^c$ が言えた

ことになる。(3) は、同値変形のみで証明しよう

(3) $(S \cap T)^c = \{x \in X \mid x \in (S \cap T)^c\}$

ここで、$x \in (S \cap T)^c \iff x \notin S \cap T$

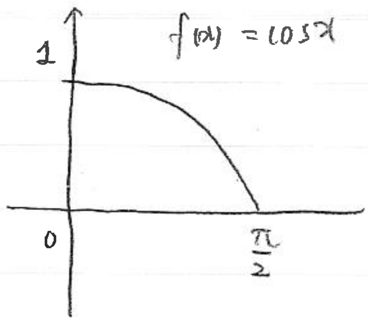
$\iff x \in S^c$ または $x \in T^c$

$\iff x \in S^c \cup T^c$.

よって $(S \cap T)^c = \{x \in X \mid x \in (S \cap T)^c\}$

$= \{x \in X \mid x \in S^c \cup T^c\} = S^c \cup T^c$ // $\square$

問題4



(1) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

fは全単射である。

(∵) fの単射性：「$\cos x_1 = \cos x_2 \iff x_1 = x_2$」を示せば良い。

$\cos x_1 = \cos x_2$ と仮定する。このとき

$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \text{ より}$$

$\boxed{\text{和積の公式}}$

$$\cos x_1 - \cos x_2 = 0 \iff \sin \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \text{ or } \sin \frac{x_1 - x_2}{2} = 0$$

(i) $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \iff \frac{x_1 + x_2}{2} = n\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\iff x_1 + x_2 = 2k\pi.$$

今、$0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ より, $0 \leq x_1 + x_2 \leq \pi$.

よって、これを満たすのは, $x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = 0 \iff x_1 = x_2$.

(ii) $\sin \frac{x_1 - x_2}{2} = 0 \iff \frac{x_1 - x_2}{2} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\iff x_1 - x_2 = 2k\pi.$$

今、$0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ より. $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 - x_2 \leq \frac{\pi}{2}$

よって、これを満たすのは, $x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2$ //

従って, fが単射であることが示された。

fの全射性

${}^\forall y \in [0,1]$ を1つ取る。$\cos x$は$[0,1]$上連続で、

$\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ より、中間値の定理より

$\exists x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ s.t. $y = \cos x$,

従って、fは全射である。

よって、以上からfは全単射であることが示された。

(2) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ は、単射であるが全射ではない。

$$\begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1, 1] \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \mapsto & f(x) = \cos x \end{array}$$

(∵) fの単射性は、(1)と全く同様に示される。

fが全射でないことは、$\cos x$は閉区間$[0, \frac{\pi}{2}]$上で

連続であるから、$[0, \frac{\pi}{2}]$上最大値, 最小値を持つ。

$f(x) = \cos x$の増減表は左下のようになり、最大値1, 最小値0

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	0

である。従って、例えば

$y = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$とすると、

$y = \cos x$を満たすxは$[0, \frac{\pi}{2}]$上に

存在しない。従って、fは全射ではない。

(3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

fは，全射ではあるが単射ではない。

fの全射性：

$$f'(x) = \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}$$ より

fの増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

$\left(f(-1) = -\frac{1}{2},\ f(1) = \frac{1}{2} \right)$ のようになる。

fは$[-1, 1]$上連続な関数であり，$f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$より，

${}^{\forall} y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$に対し，中間値の定理より

$${}^{\exists} x \in [-1, 1] \subset \mathbb{R} \text{ s.t. } y = \frac{x}{1+x^2}$$

よって，fは全射である。

一方、fは単射ではない。

たとえば $y=\frac{1}{4}$ とすると、$f(x)=\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{4}$ となる xは、

$$\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{4} \iff 1+x^2=4x$$

$$\iff x^2-4x+1=0$$

$$\iff x=2\pm\sqrt{4-1}$$

$$\iff x=2+\sqrt{3},\ x=2-\sqrt{3}$$

となり、$f(2+\sqrt{3})=f(2-\sqrt{3})=\frac{1}{4}$ だが

$2+\sqrt{3}\neq 2-\sqrt{3}$ であるから、fは単射ではない。

問題5 $\exists \max A \Rightarrow \max A = \sup A$

(☺) $\exists M \in \mathbb{R},\ M = \max A$

$\Leftrightarrow (M \in A) \land (\forall a \in A,\ a \leq M) \land (\forall u \in U(A),\ M \leq u)$

$\Rightarrow (\forall a \in A,\ a \leq M) \land (\forall u \in U(A),\ M \leq u)$

$\Leftrightarrow M = \sup A$

$\therefore \exists \max A \Rightarrow \max A = \sup A$

問題6 $\exists \min A \Rightarrow \min A = \inf A$

(☺) $\exists m \in \mathbb{R},\ m = \min A$

$\Leftrightarrow (m \in A) \land (\forall a \in A,\ m \leq a) \land (\forall l \in L(B),\ l \leq m)$

$\Rightarrow (\forall a \in A,\ m \leq a) \land (\forall l \in L(B),\ l \leq m)$

$\Leftrightarrow m = \inf A$

$\therefore \exists \min A \Rightarrow \min A = \inf A$

問題7 $B \subset \mathbb{R},\ B \neq \phi$ が下に有界と仮定すると，$L(B) \neq \phi$.

このとき $U(-B) := \{-x \mid x \in L(B)\}$ より，$U(-B) \neq \phi$。

従って $-B := \{-x \mid x \in B\}$ は上に有界である。

問題 8　$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とする。このとき、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$a_n < a_{n+1}$ を示せ。

(∵) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k}$

$$= {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot \frac{1}{n} + {}_nC_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$+ {}_nC_k \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots + {}_nC_{n-1} \cdot \frac{1}{n^{n-1}} + {}_nC_n \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} n(n-1) \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!} n(n-1)\cdots(n-k+1) \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} n(n-1)\cdots(n-(n-2)) \cdot \frac{1}{n^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{n!} n(n-1)\cdots(n-(n-1)) \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$\left.\begin{aligned} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}\right\} n+1\text{項} \quad \cdots(*)$$

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n+1-k}$$

$$= {}_{n+1}C_0 + {}_{n+1}C_1 \cdot \frac{1}{(n+1)} + {}_{n+1}C_2 \cdot \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots$$

$$+ {}_{n+1}C_k \cdot \frac{1}{(n+1)^k} + \cdots + {}_{n+1}C_{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(n+1)\cdot(n+1-1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}(n+1)(n+1-1)\cdots(n+1-(k-1))\cdot\frac{1}{(n+1)^k} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(n+1)(n+1-1)\cdots(n+1-n)\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\left.\begin{aligned} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \end{aligned}\right\} n+1\text{項} \quad \cdots (**)$$

$$\left.+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\right\} 1\text{項}$$

a_nを展開した最右辺(*)の第1, 2項と,

a_{n+1}を展開した最右辺(**)の第1, 2項は, 全く同一である.

そこで, (*)と(**)の第3項から第$n+1$項までを比較すると,

$3 \leq k \leq n+1$ について, $\frac{\tilde{k}}{n} > \frac{\tilde{k}}{n+1}$ $(1 \leq \tilde{k} \leq k-1)$ より

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$< \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$ となり,

第3項から第$n+1$項まででは, (*) < (**) となる.

また, (**)の第$n+2$項は

$$\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}_{>0}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}_{>0\ \left(\because\ \frac{n}{n+1}<1\right)} > 0$$

より, 最右辺は, 第3項以降全てが (*) < (**) となるので,

$a_n < a_{n+1}$ // □

(講義では, これに加えて $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < 3$ を示したので,

上に有界な単調非減少数列が収束することから, この

極限値を e とおくことを定義したのであった.

i.e., $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ //)

問題9

MEMO: $\forall \varepsilon > 0$ に対し、$N = N(\varepsilon)$、すなわち ε のみで

定められる N を取る。この N に対し、$\forall n \in \mathbb{N}$ で、$n \geqq N$

を満たすならば、

$$\left| \frac{n}{2n+(-1)^n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{を満たす。}$$

そのような N を取れば良い。

$$\left| \frac{n}{2n+(-1)^n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n-(2n+(-1)^n)}{2\{2n+(-1)^n\}} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{4n+2(-1)^n} \right| = \frac{1}{4n+2(-1)^n}$$

$(\because\ 4n > 2(-1)^n \ (\forall n \in \mathbb{N}))$

$$< \frac{1}{4n-4} = \frac{1}{4(n-1)} \leqq \frac{1}{4(N-1)} < \varepsilon$$

$\because$ ($4 > 2(-1)^n$。(注): $n=1$ は不可のため、$n>1$ とする必要がある)

が、後述の N は $N \geqq 2$ のため、適している。)

と計算しておくと、

$\dfrac{1}{4(N-1)} < \varepsilon$ となるような N、すなわち

$$\frac{1}{4\varepsilon} < N-1 \quad \therefore \quad \frac{1}{4\varepsilon} + 1 < N$$ となる自然数 N を

取れば良い。具体的には、$N = \left[\dfrac{1}{4\varepsilon} \right] + 2$ などである。

(注) $[x] \leqq x < [x]+1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\})$

これを念頭に入れた上で，解答を書く。

(☺) $\forall \varepsilon > 0$ を取る。$N := \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 2$ とすると，

$\forall n \geqq N$ に対して，

$$\left| \frac{n}{2n+(-1)^n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - (2n+(-1)^n)}{2(2n+(-1)^n)} \right|$$

$$= \left| \frac{(-1)^{n+1}}{4n+2(-1)^n} \right| = \frac{1}{4n+2(-1)^n}$$

$$< \frac{1}{4(n-1)} \leqq \frac{1}{4(N-1)} = \frac{1}{4\left\{\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]+2-1\right\}}$$

$$< \frac{1}{4\left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)} = \varepsilon \ //$$

従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+(-1)^n} = \frac{1}{2}$ が示された。□

問題10

MEMO：$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$N = N(\varepsilon)$ を取る。$\forall n \geqq N$ に対し，

$\left| \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n+1} - 0 \right| < \varepsilon$ となる N を定めれば良い。計算

この不等式が重要。指数関数のグラフを思いおこそう。

$$\left| \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1} - 0 \right| = \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1} < \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\leqq \dfrac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$ より，$\dfrac{1}{\varepsilon^2} < N$ となる N を取れば良い。

(具体的には，例えば $\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 = N$ など。)

(☺) $\forall \varepsilon > 0$ を取る。$N := \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ ととると，$\forall n \geqq N$ に対して，

$$\left| \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1} - 0 \right| = \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1} < \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|} = \varepsilon \text{〃}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1} = 0$ が示された。□

問題11

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 3,\quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \cdots (*)$$

とする。このとき，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ となる2数 α, β を用いて，$(*)$ を式変形すると，

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

と書ける。このとき，

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta^n(a_2 - \alpha a_1) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha^n(a_2 - \beta a_1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta^n(3 - \alpha) & \cdots (1) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha^n(3 - \beta) & \cdots (2) \end{cases}$$

(1) − (2) より

$$(\beta - \alpha)\, a_{n+1} = \beta^n(3-\alpha) - \alpha^n(3-\beta)$$

$\therefore\ a_{n+1} = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\left\{\beta^n(3-\alpha) - \alpha^n(3-\beta)\right\}$ と書ける。

$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ となる2数は，方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の2解なので，$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおける。

従って,

$$a_{n+1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt5}{2} - \frac{1-\sqrt5}{2}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \left(\frac{6-1+\sqrt5}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \left(\frac{6-1-\sqrt5}{2}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt5} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \cdot \sqrt5 \left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \cdot \sqrt5 \cdot \left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right) \right\}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore\ a_n = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \,//$$

また, $\{a_n\}$ の定義から, $a_n \in \mathbb{Z}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ であるから,

$$\sin\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right) = \sin\left(\left(a_n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)\pi\right)$$

$$= \sin a_n\pi \cdot \cos\left(\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right) - \cos a_n\pi \cdot \sin\left(\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right)$$

$$= (-1)^{(a_n+1)} \sin\left(\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right).$$

よって,

$$0 \leq \left|\sin\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right)\right| = \left|(-1)^{(a_n+1)} \sin\left(\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right)\right|$$

$$= \left|\sin\left(\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right)\right| \leq \left|\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \pi\right|$$

$$= \left|\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^n \pi\right|.$$ ここで, 次の主張を示そう

$|a| < 1$ のとき, $\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$

MEMO: $\frac{1}{|a|} - 1 = \delta > 0$ とおく。このとき,

$$|a|^{-n} = (1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, \delta^k$$

$$= 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots + n\delta^{n-1} + \delta^n$$

$> n\delta$ が成り立つ。

$\therefore$ $\dfrac{1}{n\delta} > |a|^n \geqq 0$。~~このことから~~

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{1}{N\delta} < \varepsilon \iff \dfrac{1}{\varepsilon\delta} < N$

となる N を取れば良い。($\delta > 0$ は a にのみ依存することに注意)

(∵)

$\forall \varepsilon > 0$ を取る。更に、定数 δ を $\delta = \dfrac{1}{|a|} - 1$ で定義する。

N として $N := \left[\dfrac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ ととると、$\forall n \geqq N$ に対し、

$$\left| |a|^n - 0 \right| = |a|^n = \frac{1}{|a|^{-n}} = \frac{1}{(1+\delta)^n}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, \delta^k}$$

$$= \frac{1}{1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots + n\delta^{n-1} + \delta^n}$$

$$< \frac{1}{n\delta} \leqq \frac{1}{N\delta} = \frac{1}{\left(\left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right]+1\right)\delta} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon\delta}\cdot\delta} = \varepsilon \quad \square$$

この主張から、 $\left|\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cdot \pi\right| = \pi\left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|^n \to 0 \quad (n\to\infty)$

より $$0 \leq \left|\sin\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \pi\right)\right| \leq \pi\cdot\left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|^n$$

においてはさみうちの原理を適用すると、

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \pi\right) = 0_{//}$$

問題12

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より, $\varepsilon > 0$ に対し, $^\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $^\forall n \geqq N_1 \Rightarrow$

$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ …(*)。一方,

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k = \infty$ より, $^\forall K > 0$ に対し, $^\exists N_2 \in \mathbb{N}$, s.t.,

$^\forall n \geqq N_2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} p_k > K$ である. (**)

アルキメデスの原理より. $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ に対し, $\sum_{k=1}^{N_1} p_k(a_k - \alpha)$ は有限なので,

$\left| \frac{\sum_{k=1}^{N_1} p_k (a_k - \alpha)}{\frac{\varepsilon}{2}} \right| < K$ を満たす実数 K が取れ,

(**) より, $\sum_{k=1}^{n} p_k > K$ $(^\forall n \geqq N_2)$ であることに注意する。

すなわち, $^\forall \varepsilon > 0$ に対し, $^\exists N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと,

$^\forall n \geqq N$ に対し, $\left| \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} - \alpha \right|$

$$= \left| \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_{N_1} a_{N_1}}{\sum_{k=1}^{n} p_k} + \frac{p_{N_1+1} a_{N_1+1} + \cdots + p_n a_n}{\sum_{k=1}^{n} p_k} - \frac{\alpha \sum_{k=1}^{n} p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \right|$$

$$= \left| \frac{p_1(a_1-\alpha)+p_2(a_2-\alpha)+\cdots+p_{N_1}(a_{N_1}-\alpha)}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \right.$$

$$\left. + \frac{p_{N_1+1}(a_{N_1+1}-\alpha)+p_{N_1+2}(a_{N_1+2}-\alpha)+\cdots+p_n(a_n-\alpha)}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \right|$$

$$\leqq \frac{|p_1(a_1-\alpha)+p_2(a_2-\alpha)+\cdots+p_{N_1}(a_{N_1}-\alpha)|}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$$

$$+ \frac{p_{N_1+1}|a_{N_1+1}-\alpha|+p_{N_1+2}|a_{N_1+2}-\alpha|+\cdots+p_n|a_n-\alpha|}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$$

$$< \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_1} p_k(a_k-\alpha)\right|}{K} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{k=N_1+1}^{n} p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_{\,/\!/} \quad \square$$

問題13 (∵) $^\forall x \in \mathbb{R}$ ~~に対し、$x \leq |x|$ である。従って、~~

$$2ab \leq 2|a||b| \text{ が成り立つ.}$$

両辺に $0 \leq a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2$ を足すと、

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a|\cdot|b| + |b|^2$$

$$\therefore\ (a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

$^\forall x \in \mathbb{R}$ に対し $|x| = \sqrt{x^2}$ であり、$\sqrt{x}$ は単調増加関数なので、$^\forall x, {}^\forall y \in \mathbb{R}$ に対し、

$x \leq y \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ であることを用いると、

$$\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a|+|b|)^2}$$

$$\Longleftrightarrow\ |a+b| \leq ||a|+|b|| = |a|+|b| \quad (∵\ 0 \leq |a|+|b|)$$

$\therefore$ $|a+b| \leq |a|+|b|$ を得る。 □

(注) 実は、$|a-b| \leq |a|+|b|$ でもある。

(∵) $-2ab \leq |-2ab| = 2|a||b|$ より

$$a^2 - 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$

$$\Longleftrightarrow\ (a-b)^2 \leq (|a|+|b|)^2$$

$$\Longleftrightarrow\ \sqrt{(a-b)^2} \leq \sqrt{(|a|+|b|)^2}$$

$$\Longleftrightarrow\ |a-b| \leq ||a|+|b|| = |a|+|b|$$

$\therefore$ $|a-b| \leq |a|+|b|$ □

問題14 (ⅱ) $^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して、$|x| = \sqrt{x^2}$ より

$$||a| - |b|| = \left| \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} \right| = \left| \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{(a+b)(a-b)}{|a| + |b|} \right| = \frac{|a+b|\,|a-b|}{||a| + |b||}$$

ここで、問題12より $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$\Longleftrightarrow \frac{|a+b|}{|a|+|b|} \leq 1 \quad \text{なので}$$

$$\frac{|a+b|}{|a|+|b|} |a-b| \leq 1 \cdot |a-b|$$

$$\therefore \quad ||a| - |b|| \leq |a-b| \quad \square$$

(注) もちろん、$|a-b| \leq |a| + |b| \Longleftrightarrow \dfrac{|a-b|}{|a|+|b|} \leq 1$ を

用いれば、

$$||a| - |b|| = \frac{|a-b|}{|a|+|b|} |a+b| \leq 1 \cdot |a+b| \quad \text{となり}$$

$||a| - |b|| \leq |a+b|$ も証明できる。

問題 15 $f(x) \to -\infty \quad (x \to x_0)$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall K \in \mathbb{R},\ {}^\exists \delta > 0,\ {}^\forall x \in \mathbb{R},$$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < K$$

（Kは負の方向に十分大きいものと考えると良く分かるだろう）

問題 16 $f(x) \to A \quad (x \to -\infty)$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists K \in \mathbb{R},\ {}^\forall x \in \mathbb{R}$$

$$x < K \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

（あくまでも，値域のズレが ε 以下となるとき，それを満たす定義域はこのようになる，という順番である。）

(注) $f(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$ などは，

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall K \in \mathbb{R},\ {}^\exists L \in \mathbb{R},\ {}^\forall x \in \mathbb{R},$$

$$x > L \Rightarrow f(x) > K$$ などと定義される。

問題17　まずは，概略から。

Step 1　fの像 $Y := \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \subset \mathbb{R}$は，

下に有界であることを示し，

Step 2　$\eta := \inf Y$ に対して，$f(x_{\tilde{n}_j}) \to f(c) = \eta$ となる

部分列 $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を取る。

この2 step で証明すれば良い。(講義のをそのまま

トレースするだけである。)

(∵) Step 1　fの像 $Y := \{ f(x) \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \subset \mathbb{R}$が，

下に有界でないと仮定すると，

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists y_n \in Y$ s.t. $y_n \leq -n$.

$y_n \in Y$ より，$\exists x_n \in [a, b]$; $y_n = f(x_n)$.

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ より，Bolzano-Weierstrass の定理から，

$\exists \{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \ x_{n_j} \to c \in [a, b]$

このとき，$-n_j \geq y_{n_j} = f(x_{n_j})$ だが，$j \to +\infty$ のとき，

$-n_j \to -\infty$，すなわち，$f(x_{n_j}) \to -\infty$ となるのに

対し，fの点列連続性から，$f(x_{n_j}) \to f(c) > -\infty$ となり，

矛盾。従って，Yは下に有界。

Step 2 実数の連続性公理より,

$^\exists \eta \in \mathbb{R}$, $\eta = \inf Y$. 従って, 講義中に示した

Prop より. (i) $^\forall x \in [a, b]$, $\eta \leq f(x)$

(ii) $^\forall n \in \mathbb{N}$, $^\exists \tilde{y}_n \in Y$, $^\exists \tilde{x}_n \in [a, b]$

$$\eta \leq \tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n) < \eta + \frac{1}{n}$$

$\{\tilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ より, Bolzano-Weierstrassの定理

により. $^\exists \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{x}_{n_j} \to \tilde{c} \in [a, b]$

このとき, fの点列連続性から, $f(\tilde{x}_{n_j}) \to f(\tilde{c})$ であり,

$$\eta \leq f(\tilde{x}_{n_j}) < \eta - \frac{1}{n_j} \quad から.$$

はさみうちの原理により, $j \to +\infty$ のとき,

$$f(\tilde{x}_{n_j}) \to \eta$$

従って. $f(\tilde{c}) = \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_{n_j}) = \eta$ となり,

これは最小値 $\eta = f(c)$ を達成する c が $[a, b]$ に

存在することを示している。 □

問題18　平均値の定理の証明で本質的に活躍した

Rolleの定理の仮定は、

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, が (a, b) 上微分可能であり、

$$\exists c \in I \text{ s.t. } f(c) = \max\{f(x) \mid x \in I\}$$

$$\text{or } f(c) = \min\{f(x) \mid x \in I\}$$

ならば、$f'(c) = 0$ であった。

この時証明で用いた片側極限は、cの近くでしか議論していない。すなわち、

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0 \leqq x - c < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0 \text{ より}\quad -\varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqq 0$$

である。逆も $\exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$0 \leqq c - x < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0 \text{ より}\quad \varepsilon > \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqq 0$$

以上より $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$ 。結局、$x = c$で微分可能であれば良く、(a, b) 上で $f'(x)$ が連続である必要がない。

問題19　$F(x)$ が $[0,1]$ 上連続であることを示す。

$x=0$ のとき，右極限を調べれば良い。

$F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ であり，

$^\forall \varepsilon > 0$ に対して　$^\exists \delta := \frac{\varepsilon}{M}$ ととると，$0 \leq {}^\forall x < \delta$ に対して，

$$\left| \int_0^x f(t)\,dt - F(0) \right| = \left| \int_0^x f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq Mx < M\delta$$

$$= M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

よって，$F(x)$ は $x=0$ で（右）連続。

$x=1$ のとき，左極限を調べれば良い。

$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 1$ であり

$({}^\forall x \in \mathbb{R})$

$^\forall \varepsilon > 0$ に対して，$^\exists \delta := \frac{\varepsilon}{M}$ ととると，$0 \leq 1-x < \delta$ に対して，

$$\left| \int_0^x f(t)\,dt - F(1) \right| = \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_x^1 f(t)\,dt \right| \leq \int_x^1 |f(t)|\,dt \leq \int_x^1 M\,dt$$

$$= (1-x)M < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$ よって，

$F(x)$ は $x=1$ で（左）連続。

$^\forall x_0 \in (0, 1)$ に対して，通常の連続性を示す．

$^\forall \varepsilon > 0$ に対して，$^\exists \delta := \min\left\{ \dfrac{\varepsilon}{M}, \dfrac{x_0}{2}, \dfrac{1-x_0}{2} \right\}$ とおくと，

$^\forall x \in \mathbb{R}$，　$|x - x_0| < \delta$ のとき，（δ の定義から当然 $x \in (0,1)$）

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{x_0} f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x M\,dt \right| = |x - x_0|\,M$$

$$< M \cdot \delta \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$ となり，

$F(x)$ は $^\forall x_0 \in (0, 1)$ 上連続．

以上から，$F(x)$ は $[0, 1]$ 上連続。

問題20

$\forall \varepsilon > 0$ を取り，固定する。このとき，アルキメデスの原理から，

$\dfrac{2}{\varepsilon} < N$ となる自然数 N が存在する。よって，$\dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

を満たす N が取れる。この N を固定する。

分母が N より小さい有理数は，$[0,1]$ 閉区間に

有限個しか存在しない。

(☺) 分母が N より小さい有理数を，$\dfrac{m}{n}$ とおく。$(n < N)$

このとき，$\dfrac{1}{N} < \dfrac{1}{n}$ であるから，$[0,1]$ に分母が n である

有理数は，$0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{n}{n}$ より

$n+1$ 個以上は存在しない。よって，$1 \leq n < N$ となる全ての n に対して

同様の議論を行えば，$\dfrac{1}{2}(N+2)(N-1)$ 個以上は存在しない。

よって，有限個である。□

これらの有限個の分母が N より小さな有理数は，$[0,1]$ の

閉区間を多くとも $\left\{\dfrac{1}{2}(N+2)(N-1)+1\right\}$ 個に分割する。

よって，その中で最小の長さ ε^* を持つ，分割された区間が存在する。

$$\tilde{\varepsilon} := \min\left\{\frac{\varepsilon^*}{2\cdot\frac{1}{2}(N+2)(N-1)}, \frac{\varepsilon}{2\cdot\frac{1}{2}(N+2)(N-1)}\right\} とする。$$

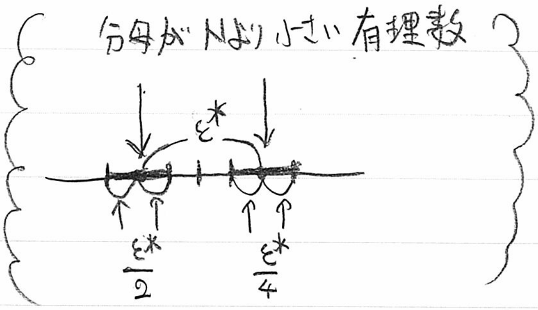
全ての分母が N より小さい有理数を，その有理数を中央に持ち，

区間の幅が $\tilde{\varepsilon}$ である区間でおおう。

すると、この区間の長さの総和は、

$$\tilde{\varepsilon} \times \frac{1}{2}(N+1)(N-2) = \min\left\{\frac{\varepsilon^*}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。さらに、これらの区間は、互いに共通部分を持たない。



これらの分母がNより小さい有理数をおおった区間の端点での閉区間 $[0,1]$ の分割を Δ とする。小区間を $[x_k, x_{k+1}]$ と書くとする。

このとき、$0 \leq f(x) \leq 1$ に気を付けると、

$$s_\Delta(f) = 0, \quad S_\Delta(f) = \sum_\Delta (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

$$< \underbrace{1}_{f(x) \leq 1} \times \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{N}\right)}_{f(x) \leq \frac{1}{N}} \times 1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

となり、ε は任意だったので、$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0.$

また、$s_\Delta(f) = 0$ より、$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0.$

よって、f は $[0,1]$ 上 Riemann 可積分である。□

解析学入門，いかがでしたでしょうか．

一発でわからなくても，悲しい顔をするのではなく，

難しいのだから時間を掛けて理解しようとする

心構えが重要です．

その昔，小平邦彦先生が「ある定理がわからなかった

ので20回写経した」ということをおっしゃっていた

と聞いたことがあります．やはり，大数学者という

人でも苦労することがあるのです．

ところで，数学は一人で悩む時間が

どうしても必要な学問です．すぐに投げ出すのではなく，

なく，何がどうなっているのか，どこが難しいのか，

冷静に判断し，人に説明できるように

ならなくてはいけません．最初は理解できなかった

ものも，多くの勉強を経てもう一度振り返ると，

驚く程明快に理解できるようになることが

あります．大学（若しくは大学院まで）数学と親しく

なれることを願ってやみません．　永原健大郎