解析学入門 補足

§1 実数の構成

1° 実数の性質

実数の集合 $\mathbb{R}$ というのは，以下の (R1) - (R17) の性質を満たすものからなる集合のことである。

四則演算

$^\forall a, {}^\forall b, {}^\forall c \in \mathbb{R}$ に対して，和 $a+b \in \mathbb{R}$，積 $ab \in \mathbb{R}$ が定義され，次の (R1) - (R10) が成り立つ

(R1) $a+b = b+a$

(R2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

(R3) $\underset{\text{ゼロ}}{0} \in \mathbb{R}$ であり，$a+0 = a$

(R4) $^\exists -a \in \mathbb{R}$，$a+(-a) = 0$

(R5) $ab = ba$

(R6) $(ab)c = a(bc)$

(R7) $a(b+c) = ab+ac$

$(a+b)c = ac+bc$

(R8) $\exists 1 \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$

いち

(R9) $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in \mathbb{R}, \quad a \cdot a^{-1} = 1$

(R10) $1 \neq 0$

順序

$\forall a, \forall b, \forall c \in \mathbb{R}$ に対して，次を満たすような

順序 $(\leq)$ がある.

(R11) $a \leq a$

(R12) $a \leq b, \ b \leq a \Rightarrow a = b$

(R13) $a \leq b, \ b \leq c \Rightarrow a \leq c$

(R14) $a \leq b$ or $b \leq a$ の少なくとも一方は成立する。

(R15) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

(R16) $a \geq 0, \ b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

$a \leq b$ を $b \geq a$ とも書き，「$a \leq b$ かつ $a \neq b$」のことを

$a < b$ と書く。$a > 0$ を正，$a < 0$ を負と呼ぶ。

(注) (R1) - (R16) を満たすものは，実数とは限らない。例えば有理数 $\mathbb{Q}$ も，これらを満たす。つまり，(R1) - (R16) だけでは実数は特徴付けられない。

実数の連続性公理

ここに述べる (R17) が実数の特徴的な性質である

<u>公理</u>　実数 $\mathbb{R}$ は次の性質を持つ

(R17)　$^\forall A \subset \mathbb{R},\ A \neq \phi$ に対して，

$$A \text{ が上に有界} \Rightarrow {}^\exists s \in \mathbb{R},\quad s = \sup A$$

(注) $s \in \mathbb{R}$ が A の上限である，$(s = \sup A)$

$$\Longleftrightarrow \text{(i)}\quad {}^\forall a \in A,\quad a \leq s$$

$$\text{(ii)}\quad {}^\forall x \in \mathbb{R},\quad x < s \Rightarrow {}^\exists a \in A.\quad x < a \leq s$$

すなわち，上に有界な実数の部分集合は上限を実数に持つ。

2. 数列の極限

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ において，収束・発散を定義する．

$$a_n \to \alpha \ (n\to\infty) \quad \text{or} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}N\in\mathbb{N},\ {}^{\forall}n\in\mathbb{N}$$

$$(n\geq N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon)$$

※ もう少し厳密に言えば，上記の命題が成立するような極限値 α の存在を言う必要がある．そのため，α を入れて議論すると，以下のようになる．

$${}^{\exists}\alpha\in\mathbb{R},\ {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}N\in\mathbb{N},\ {}^{\forall}n\in\mathbb{N}$$

$$(n\geq N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon)$$

数列 $\{a_n\}$ が発散 $\Longleftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ が収束しない

となるので，発散の厳密な定義は，上の命題を否定すれば良い。すなわち，

$${}^{\forall}\alpha\in\mathbb{R},\ {}^{\exists}\varepsilon>0,\ {}^{\forall}N\in\mathbb{N},\ {}^{\exists}n\in\mathbb{N}$$

$$((n\geq N)\wedge(|a_n-\alpha|\geq\varepsilon))$$

※ ここで, $^\forall \alpha \in \mathbb{R}$ が入ることに少し不思議な気もするが, 命題を否定しているだけなので, 正しい。例えば $a_n = (-1)^n = \cos n\pi$ について考える。

$^\forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\alpha \neq 1)$ に対し, $^\exists \varepsilon = \dfrac{|1-\alpha|}{2} > 0$ ととる. このとき,

$^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $^\exists n = 2N$ ととれば, $n = 2N > N$ であり,

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &= |(-1)^{2N} - \alpha| \\ &= |1 - \alpha| > \frac{|1-\alpha|}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。次に,

$\alpha = 1 \in \mathbb{R}$ に対し, $^\exists \varepsilon = 1 > 0$ ととる。このとき,

$^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $^\exists n = 2N+1$ ととれば,

$n = 2N+1 > N$ であり

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &= |(-1)^{2N+1} - 1| \\ &= |-1-1| = 2 > 1 = \varepsilon \end{aligned}$$

となる. 以上から $a_n = (-1)^n$ に対して,

$^\forall \alpha \in \mathbb{R},\ ^\exists \varepsilon > 0,\ ^\forall N \in \mathbb{N},\ ^\exists n \in \mathbb{N}$

$$((n \geq N) \wedge (|a_n - \alpha| \geq \varepsilon))$$ が

直接証明できたことになる.

Prop (極限値の一意性)

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が収束すると仮定する。

このとき，極限値は唯一つ存在する。

i.e.,（すなわち） $a_n \to \alpha \ (n\to\infty)$ かつ $a_n \to \beta \ (n\to\infty)$

$\Rightarrow \alpha = \beta$ が成り立つ。

(∵) 仮定から，$^\forall \varepsilon > 0$ に対して，$^\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $^\forall n_1 \in \mathbb{N}$

$$\left(n_1 \geq N_1 \Rightarrow |a_{n_1} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

及び，上記の ε に対して，$^\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $^\forall n_2 \in \mathbb{N}$

$$\left(n_2 \geq N_2 \Rightarrow |a_{n_2} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

が成り立つ。$N := \max\{N_1, N_2\}$ とすると，

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha - a_N) + (a_N - \beta)|$$
$$\leqq |\alpha - a_N| + |a_N - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

すなわち，$0 \leqq |\alpha - \beta| < \varepsilon \quad ({}^\forall \varepsilon > 0) \cdots (*)$ となる。

ここで，$\alpha \neq \beta$ と仮定すると，$\varepsilon := \dfrac{|\alpha-\beta|}{2} > 0$ とおけば，

$|\alpha - \beta| > \dfrac{|\alpha - \beta|}{2} = \varepsilon$ となって，$^\forall \varepsilon > 0$ に対して

$(*)$ が成立することに矛盾。従って，$\alpha = \beta$. □

Prop 数列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$が収束すると仮定すると，数列は数の集合として有界である。

(注) 数列が有界

$\iff$ 集合$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \{a_n \in \mathbb{R} \mid {}^\forall n \in \mathbb{N}\}$ が有界

$\iff$ ${}^\exists M > 0,\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq M$ が成り立つ

(注) 数列が上に有界

$\iff$ $U(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \neq \phi$

$\iff$ ${}^\exists M \in \mathbb{R},\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq M$ が成り立つ

(注) 数列が下に有界

$\iff$ $L(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \neq \phi$

$\iff$ ${}^\exists m \in \mathbb{R},\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq a_n$ が成り立つ

(∵) $a_n \to \alpha\ (n \to \infty)$ とする。このとき，$\varepsilon = 1 > 0$ に対して，${}^\exists N \in \mathbb{N},\ {}^\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < 1)$ が成立する。従って，$n \geq N$ となる n については

$$|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| = |(a_n - \alpha) + \alpha|$$
$$\leq |a_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|.$$

一方，$m := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|\}$ とすると，$1 \leq n < N$ についても，$|a_n| < m$。以上から，$M := \max\{m, 1+|\alpha|\}$ とすれば，${}^\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq M$ □

◦ **Prop** (極限値と四則)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ が,

$a_n\to\alpha\ (n\to\infty)$, $b_n\to\beta\ (n\to\infty)$ を満たすと

仮定する。このとき, 次が成立する.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} k a_n = k\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = k\alpha$ (但し, k; 定数)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha+\beta$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \alpha\cdot\beta$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

(但し, (4) のみ, $b_n\neq 0$, $\beta\neq 0$)

(∵) (1) $k\neq 0$ とする。仮定より, $\forall\varepsilon>0$ に対し, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$$n\geq N \Rightarrow |a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

が成立する。従って, 上の ε, N, n に対し,

$$|ka_n - k\alpha| = |k||a_n-\alpha| < |k|\cdot\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

となるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$.

$k=0$ のときは, $ka_n=0$, $k\alpha=0$ より $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=1\in\mathbb{N}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $|ka_n - k\alpha| = 0 < \varepsilon$. □

(2) $^\forall \varepsilon > 0$ を取り, 以降固定する. このとき,

$$^\exists N_1 \in \mathbb{N}, \ ^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$^\exists N_2 \in \mathbb{N}, \ ^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる。$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと,

$^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ に対し,

$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成立するから

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)|$$

$$\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となる。$\varepsilon > 0$ は任意だったので,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta \text{ 〃} \qquad \square$$

(3) $a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$ より, prop から

$$^\exists K > 0, \ ^\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| < K \quad \cdots ①$$

一方, $^\forall \varepsilon > 0$ を取り, 以降固定する。このとき,

$$^\exists N_1 \in \mathbb{N}, \ ^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

$$^\exists N_2 \in \mathbb{N}, \ ^\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

となる。$(\cdots ②)$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと,

${}^{\forall} n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ に対し,

$|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$, $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ が成立する

から, $|a_n b_n - \alpha\beta|$

$$= |a_n b_n - \beta a_n + \beta a_n - \alpha\beta|$$

$$= |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)|$$

$$\leqq |a_n(b_n - \beta)| + |\beta(a_n - \alpha)|$$

$$= |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|$$

$$\underset{①,②}{<} K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)} \quad \cdots(注)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|\beta|}{|\beta|+1}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

(注) ② がかなり技巧的に見えるが, 実は
この不等式を成立させるために用意してあっただけ
である。一般に, 二つの数列・関数の積で, 同時に
添字・変数が動く場合, 片方を止めた積をはさむ.

i.e., $|a_n b_n - a_{n+k} \cdot b_{n+k}| = |a_n b_n - a_n b_{n+k} + a_n b_{n+k} - a_{n+k} b_{n+k}|$
$= |a_n(b_n - b_{n+k}) + b_{n+k}(a_n - a_{n+k})|$. これは頻繁に用いられる.

(4) $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{\beta}$ を示せば良い。そうすれば，(3)より，

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (n \to \infty)$$ 。

$\beta \neq 0$ より，$\dfrac{|\beta|}{2} > 0$ であり，これに対して，$^{\exists} N_1 \in \mathbb{N}$,

$^{\forall} n \in \mathbb{N}$, $\quad n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - \beta| < \dfrac{|\beta|}{2}$ が成り立つ。

よって $|b_n| = |\beta - \beta + b_n| = |\beta - (\beta - b_n)|$

$\geqq \big||\beta| - |\beta - b_n|\big| > \left||\beta| - \dfrac{|\beta|}{2}\right| = \dfrac{|\beta|}{2}$ も成り立つ。

ここで，$^{\forall} \varepsilon > 0$, を取り，以降固定する。このとき，

$^{\exists} N_2 \in \mathbb{N}$, $^{\forall} n \in \mathbb{N}$, $\quad n \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < \dfrac{|\beta|^2 \cdot \varepsilon}{2}$

ととれる。$N := \max\{N_1, N_2\}$ とすると，$^{\forall} n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N$

に対し，$|b_n| > \dfrac{|\beta|}{2}$, $\quad |b_n - \beta| < \dfrac{|\beta|^2 \cdot \varepsilon}{2}$ が成り立つので，

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta - b_n}{b_n \beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n||\beta|} \cdots (\text{注})$$

$$< \frac{|\beta|^2 \cdot \varepsilon}{2 \cdot \frac{|\beta|}{2} \cdot |\beta|} = \frac{|\beta|^2 \cdot \varepsilon}{|\beta|^2} = \varepsilon \,_{//} \quad \square$$

(注) この証明も，ここから不等式を用いて ε で上から評価するために，技巧を用いていただけである。

2. (R17)と同値な命題

(R17)と同値な命題がいくつか知られている。

その一部を紹介し，証明を与える。

Thm1 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調非減少(広義単調増加)で，

上に有界ならば，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

(∵) ((R17) ⇒ Thm1) ← 講義中にも証明を与えたが…。

仮定より，$a_n \leq a_{n+1}$ ($^\forall n\in\mathbb{N}$) であり，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

上に有界なので，$^\exists M\in U(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, $a_n\leq M$ ($^\forall n\in\mathbb{N}$)。

ここで，(R17)より $^\exists s\in\mathbb{R}$, $s=\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であり，

supの定義から，$a_n\leq s$ ($^\forall n\in\mathbb{N}$) となる。

$^\forall\varepsilon>0$ を取る。このとき，supの定義から $^\exists N\in\mathbb{N}$,

$s-\varepsilon < a_N \leq s$。従って，$^\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N$ であれば

$$s-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq s < s+\varepsilon$$

$\therefore\ |a_n - s| < \varepsilon$。数列の収束の定義から

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は s に収束する。

○以下の2つの命題は，(R17)とは無関係に成立する。

<u>prop 1</u> $a_n \to a\ (n\to\infty)$, $b_n \to b\ (n\to\infty)$ とする。

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$$

<u>prop 2</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c_n \leq b_n$ であり，

$$a_n \to a\ (n\to\infty),\ b_n \to a\ (n\to\infty)$$

$$\Rightarrow c_n \to a\ (n\to\infty)$$

(はさみうちの原理)　(☺ 講義中に証明した。□)

↳((R17) は用いていない)

○部分列

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の項の一部を取り出し，順序を変えないで並べてできる(無限)数列を $\{a_n\}$ の部分列という。

これは，数列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ を用いて，$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$ と表すことができる。

<u>Thm 2</u> (Bolzano - Weierstrass の定理)

有界な数列は収束部分列を持つ。

○ 以下の2つの命題は、(R17)とは無関係に成立する

<u>prop 1</u>　$a_n \to a\ (n \to \infty)$, $b_n \to b\ (n \to \infty)$ とする.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqq b_n \Rightarrow a \leqq b$$

(∵) 背理法で示す。 $a > b$ と仮定する。

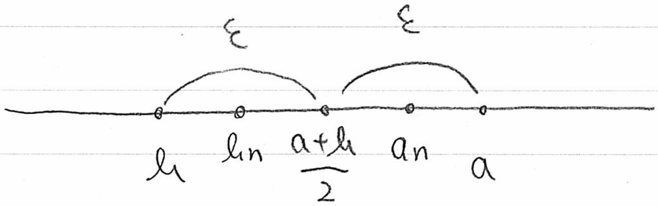
$\varepsilon := \dfrac{a-b}{2} > 0$ とおく。 仮定より $\exists N_1 \in \mathbb{N}$,

$\forall n \in \mathbb{N}.\ n \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$,

$\exists N_2 \in \mathbb{N}.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ n \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$.

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N$ に対し

$(|a_n - a| < \varepsilon) \land (|b_n - b| < \varepsilon)$ となる.



このとき, $b_n < a_n$ となり. 矛盾。 □

<u>prop 2.</u> $\forall n \in \mathbb{N}$. $a_n \leqq c_n \leqq b_n$ であり,

$$a_n \to a,\ b_n \to a\ (n \to \infty) \Rightarrow c_n \to a\ (n \to \infty)$$

(∵) $\forall \varepsilon > 0$ に対し, 仮定から,

$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}.\ n \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}.\ n \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とすると, $\forall n \geqq N$ に対して $|a_n - a| < \varepsilon$,

$|b_n - a| < \varepsilon$, 従って, $-\varepsilon < a_n - a \leqq c_n - a \leqq b_n - a < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |c_n - a| < \varepsilon$ □

○部分列

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の項の一部を取り出し、順序を変えないで並べてできる(無限)数列を $\{a_n\}$ の部分列という。

これは、数列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ を用いて、$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$ と表すことができる。$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ とも書く。

(ex) $a_n = (-1)^n$ の部分列として、偶数番目の項を取り出したものを取ると、

$a_2 = 1,\ a_4 = 1,\ a_6 = 1,\ \cdots$

よって、この部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $(n_k = 2k)$ は各項が 1 の数列である。

<u>Thm</u> 2. (Bolzano - Weierstrass の定理)

有界な数列は収束部分列を持つ。

(☺) (Thm 1 $\Rightarrow$ Thm 2)

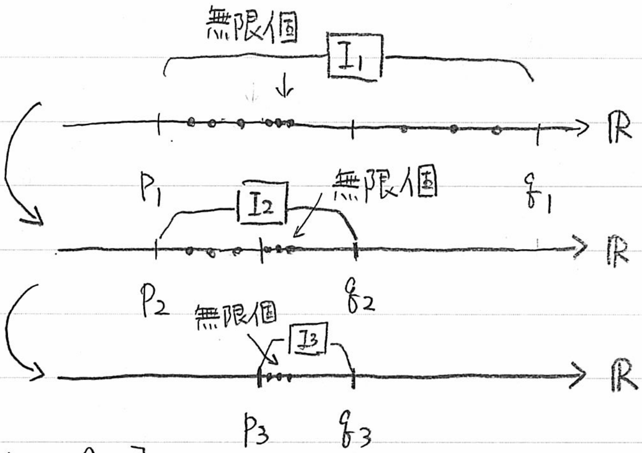
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を有界な数列とすると，$^\exists M>0$ s.t.

$|a_n|<M$ $(^\forall n\in\mathbb{N})$。$p_1=-M$，$q_1=M$ とおくと，

$p_1\leq a_n\leq q_1$ $(^\forall n\in\mathbb{N})$ とできる。

$I_1=[p_1,q_1]$ $\left(:=\{x\in\mathbb{R}\mid p_1\leq x\leq q_1\}\right)$ を，

中点 $\frac{p_1+q_1}{2}$ で分け，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の項を無限個含む方の区間を1つ取り，$I_2=[p_2,q_2]$ とする。



次に，I_2 を再び中点で分け，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の項を無限個含む区間を1つ取り，$I_3=[p_3,q_3]$

とする。以下，これを繰り返して，閉区間の列

$I_n=[p_n,q_n]$ を作る。

$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$ より，

$p_1\leq p_2\leq p_3\leq\cdots\leq p_n\leq\cdots\leq q_n\leq\cdots\leq q_3\leq q_2\leq q_1$

よって，$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界な単調列であるから，

(Thm 1) より、$\exists p, \exists q \in \mathbb{R}$, s.t.

$$p_n \to p \ (n \to \infty), \quad q_n \to q \ (n \to \infty).$$

ここで、I_n の長さは I_{n-1} の長さの半分であるから

$$q_n - p_n = \frac{1}{2}(q_{n-1} - p_{n-1})$$

$$\therefore \ q_n - p_n = \frac{1}{2^{n-1}}(q_1 - p_1)$$

従って、$|q_n - p_n| < \dfrac{2M}{2^{n-1}} \to 0 \quad (n \to \infty)$

すなわち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(q_n - p_n) = \left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) = 0$

$$\therefore \ p = q_{\,//}$$

(注) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a + b$$

次に、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ で、

$a_{n_k} \to p \ (k \to \infty)$ となるものを構成しよう。

$a_{n_1} \in I_1$ を任意に取る。I_2 は無限個の項を含むから

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } (n_1 < n_2) \wedge (a_{n_2} \in I_2)$$

これを続けて、$a_{n_k} \in I_k$ を満たす $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $n_1 < n_2 < \cdots$ が取れる。$p_k \leq a_{n_k} \leq q_k$ であり、$p_k, q_k \to \alpha$ であるから、prop 2 より、$a_{n_k} \to \alpha$ となる。□

Thm 2 ⇒ Thm 1 を示す。すなわち，

有界な数列は収束部分列を持つ
　⇒ 上に有界な単調非減少数列は収束する。

(☺) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ を上に有界な単調非減少数列

と仮定する。すなわち，$^\exists m \in \mathbb{R}$, $^\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_1 \leq a_n \leqq m。$$ このとき，

$^\exists M := \max\{|a_1|, |m|\}$ とすると，

$-M \leqq a_1 \leqq a_n \leqq m \leqq M$ より，$|a_n| \leqq M$.

となり，数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。

従って，仮定より $\{a_n\}$ は収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を

持つ。すなわち，$^\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $a_{n_k} \to \alpha \ (k \to \infty)$. …(*)

$^\forall \varepsilon > 0$ を取り，固定する。このとき，(*) より，

$$^\exists K \in \mathbb{N},\ ^\forall k \in \mathbb{N},\quad k \geqq K \Rightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

一方，$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し，$a_n \leq a_{n+1}$ なので，

$$^\forall n \in \mathbb{N},\ n_k \leq n \leq n_{k+1} \Rightarrow a_{n_k} \leq a_n \leq a_{n_{k+1}}$$

$$\therefore\quad -\varepsilon < a_{n_k} - \alpha \leq a_n - \alpha \leq a_{n_{k+1}} - \alpha < \varepsilon$$

kは任意なので，$^\forall n \in \mathbb{N}$， $n \geqq n_K$ に対して，

$^\exists k \in \mathbb{N}\ (k > K)$， $n_k \leqq n \leqq n_{k+1}$ となる．

従って，$-\varepsilon < a_{n_k} - \alpha \leqq a_n - \alpha \leqq a_{n_{k+1}} - \alpha < \varepsilon$

$\therefore\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$ $\square$

<u>Thm 1</u> $\Rightarrow$ (R17) を示す。これにより，

<u>Thm 2</u> $\Leftrightarrow$ <u>Thm 1</u> $\Leftrightarrow$ (R17) が言える．

(☺) 上に有界な単調非減少数列は収束

$\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$，$A \neq \phi$ が上に有界であれば，

$^\exists S \in \mathbb{R}$， $S = \sup A$ を示せば良い。

$A \subset \mathbb{R}$，$A \neq \phi$ が上に有界と仮定する。このとき，

$U(A) \neq \phi$ であり，$^\forall a \in A$，$^\forall b \in U(A)$ に対して，

$a \leqq b$ が成り立つ．そこで，A，B から1つずつ元 a，b を

それぞれ取り，固定する．

(i) ($a = b$ のとき) $b \in U(A)$ より，$^\forall a \in A$ に対して，

$a \leqq b$ が成り立つ。次に，$^\exists c \in U(A)$，

$c < b$ と仮定すると， $c < b = a$ より， $c < a$．

$a \in A$ なので，これは $c \in U(A)$ に矛盾。従って，

$^\forall c \in U(A)$，$b \leqq c$．

よって，b は $U(A)$ の最小元であるから，$\sup A$ の定義より

$b = \sup A$ である。

(ii) $a < b$ のとき，$a_1 = a$, $b_1 = b$ とする。

$I_1 = [a_1, b_1]$ の中点 $\frac{a_1+b_1}{2}$ が存在する。

Claim $^\forall c \in \mathbb{R}$ に対して，$c \in U(A)^c$ or $c \in U(A)$ である。

ここで，$A^c := \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$．（Aの補集合のこと）

(∵) 定義より，$\begin{cases} U(A)^c \cup U(A) = \mathbb{R}, \\ U(A)^c \cap U(A) = \phi \end{cases}$ であるから，

$^\forall c \in \mathbb{R} = U(A)^c \cup U(A)$ は，

$c \in U(A) \Rightarrow c \notin U(A)^c$, $c \in U(A)^c \Leftrightarrow c \notin U(A)$ □

Claim より 中点 $\frac{a_1+b_1}{2} \in U(A)$ または $\frac{a_1+b_1}{2} \in U(A)^c$，である。

$\begin{cases} \frac{a_1+b_1}{2} \in U(A) \text{ のとき，} b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}\text{。} a_2 = a_1 \\ \frac{a_1+b_1}{2} \in U(A)^c \text{ のとき，} a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \quad b_2 = b_1 \end{cases}$ として，数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定義する。（$a_n \in U(A)^c$, $b_n \in U(A)$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$)）。$a_1 < b_1$ より，

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$

となる。従って，a_n は上に有界な単調非減少数列

であり，b_n は下に有界な単調非増加数列である。

Claim 下に有界な単調非増加数列は収束する。

(実は Bolzano-Weierstrass の定理のときは暗黙のうちに使っていたが…)

(∵) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ を、下に有界な単調非増加数列と仮定する。すなわち、

$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad m < a_n,$

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_{n+1} \leq a_n$

今、$b_n = -a_n$ とおく。

$M := -m$ とおくと、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$b_n = -a_n < -m = M$ だから、b_nは上に有界。

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$-a_n \leq -a_{n+1}$ より、

$b_n \leq b_{n+1}$ となり、b_nは単調非増加数列。

従って、b_nは収束する。

すなわち、$\exists \beta \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$

ここで、Prop より、$\lim_{n\to\infty}(-b_n) = -(\lim_{n\to\infty} b_n) = -\beta$

であり、$-b_n = a_n$ より、a_nは収束し、

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\beta$ となる。□

Claim より、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束するので、

その極限値を α, β とおく。

ここで、$I_n = [a_n, b_n]$ の長さは I_{n-1} の長さの半分であるから、

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$$

$$\therefore b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$$

従って、$|b_n - a_n| < \frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1) \to 0 \quad (n \to \infty)$

すなわち、$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \beta - \alpha = 0 \quad \therefore \alpha = \beta$

ここで、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の構成方法から、

${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \in \mho(A)^c$, $b_n \in \mho(A)$ である

ことに注意する。

$\alpha = \sup A$ を証明しよう。もし、${}^\exists \gamma \in \mho(A)$, $\gamma < \alpha$ となる

とき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので、$\varepsilon = \frac{\alpha - \gamma}{2} > 0$ ととると、

${}^\exists N_1 \in \mathbb{N}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon = \frac{\alpha - \gamma}{2}$,

今、$-\frac{\alpha - \gamma}{2} < a_n - \alpha \Leftrightarrow a_n > \frac{\alpha + \gamma}{2} > \frac{\gamma + \gamma}{2} = \gamma$

より、$\gamma < a_n \leqq \alpha$ を満たす $a_n \in \mho(A)^c$ が存在する。

が、これは $\gamma \in \mho(A)$ に矛盾。よって ${}^\forall \gamma \in \mho(A)$, $\alpha \leqq \gamma$。

次に、$\alpha \in \mho(A)$ を証明しよう。$\alpha \in \mho(A)^c$ とすると、

$^\exists a \in A$, $\alpha < a$ となる。このとき、$\lim_{n\to\infty} l_n = \alpha$ なので、

$\varepsilon = \dfrac{a-\alpha}{2}$ ととると、$^\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $^\forall n \in \mathbb{R}$

$$n \geqq N_2 \Rightarrow |l_n - \alpha| < \varepsilon = \frac{a-\alpha}{2}.$$

$$\therefore \frac{a-\alpha}{2} > l_n - \alpha \iff l_n < \frac{a+\alpha}{2} < \frac{a+a}{2} = a$$

より、$\alpha \leqq l_n < a$ を満たす $l_n \in \mho(A)$ が存在する

が、これは $a \in A$ に矛盾。よって、$\alpha \in \mho(A)$.

以上から、$\alpha \in \mho(A)$ かつ $^\forall \gamma \in \mho(A)$, $\alpha \leqq \gamma$ より

$\alpha = \sup A$ である。□

以上から、(R 17) $\iff$ <u>Thm 1</u> $\iff$ <u>Thm 2</u> が示されたことになる。

このことは、実数の連続性公理が上の3種類に言い換えできることを意味する。

3. 実数の構成

(R17) が成立するような集合 $\mathbb{R}$ の存在は非自明である。

つまり、公理は何でも付け加えれば良いというものではなく、

公理を満たすような集合の存在を言わなくてはいけない。

前提

有理数 $\mathbb{Q}$ について、(R1)〜(R16) が成立すると仮定する。

<u>Def</u> (有理数の Cauchy 列)。有理数の列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$

を考える。$^\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ に対し、

$^\exists N \in \mathbb{N}$, $^\forall n \in \mathbb{N}$, $^\forall m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

が成立するとき、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であるという。

<u>Def</u> (有理数列の極限)。有理数の列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$

と、$a \in \mathbb{Q}$ を考える。任意の有理数 $\varepsilon > 0$ に対して、

$^\exists N \in \mathbb{N}$, $^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

が成立するとき、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ は a に収束する

といい、a を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限と呼ぶ。

これもやはり、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$,　$a_n \to a$ $(n\to\infty)$

などと書く。

Def (同値関係) Sを集合とする. Sの2つの元

$^\forall x \in S$, $^\forall y \in S$ について, 2つの元の関係

$x \sim y$, $x \not\sim y$ のいずれかが定まっており, 次の条件を

満たすとき, $\sim$ を S の同値関係と呼ぶ.

(i) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(ii) $x \sim x$

(iii) $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ $\left(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \cdots\right)$ でも o.k.

(ex) "$=$"(イコール)は, (例えば) $\mathbb{N}$ の同値関係である.

(i) $a = b \Rightarrow b = a$

(ii) $a = a$ $\qquad (a, b, c \in \mathbb{N})$

(iii) $a = b$, $b = c \Rightarrow a = c$

Def (同値類) 集合 S に同値関係 $\sim$ が定まっているとき,

$$[x] := \{ y \in S \mid x \sim y \}$$

を x の同値類と呼ぶ。また, $y \in [x]$ であるとき,

yを同値類 $[x]$ の代表元と呼ぶ。

更に, $S/\sim \; := \{ [x] \mid x \in S \}$

を商集合と呼ぶ。

(ex) 有理数の部分集合 $\mathbb{Q}_+ := \{ a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \}$ (正の有理数)は、"=" が同値関係になる。(ここだけ、= を ~ と書く)

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+ \ ({}^\forall a \in \mathbb{Z},\ {}^\forall b \in \mathbb{Z},\ a > 0,\ b > 0)$$

に対し、$\left[\frac{q}{p}\right] := \left\{ \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}_+ \;\middle|\; \frac{b}{a} \sim \frac{q}{p} \right\}$

(但し、p, q は互いに素な正の整数)

は、$\frac{q}{p}$ の同値類である。

$$\left(\begin{array}{l} \text{(ex)} \ \left[\frac{1}{2}\right] = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \cdots \right\} \ \text{であり、} \\ \qquad \frac{2}{4} \in \left[\frac{1}{2}\right] \ \text{は、} \left[\frac{1}{2}\right] \text{の代表元。} \end{array} \right)$$

更に、$\mathbb{Q}_+ / \sim \ := \left\{ \left[\frac{q}{p}\right] \;\middle|\; \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}_+ \right\}$ は、

商集合 $\mathbb{Q}_+ / \sim$ の元 $\left[\frac{q}{p}\right]$ が $\frac{q}{p}$ に約分できる正の有理数全体を表すことになる。

いよいよ構成に入る。

Def（実数）以降，$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\{a_n\}$ と略記する．

$$S := \left\{ \{a_n\} \mid \{a_n\} \subset \mathbb{Q},\ \{a_n\};\ \text{cauchy列} \right\}$$

として，有理数の Cauchy 列全体からなる集合 S を定義する。

ここで，$\{a_n\}, \{b_n\} \in S$ に対して，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

であるとき，$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ として S に同値関係を定める。

$\mathbb{R} = S/\sim$ の元を実数と呼ぶ。

（注）$\{a_n\}, \{b_n\} \in S$ に対して，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

であるとき，$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ が S の同値関係になる

(☺) (i) $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ と仮定する。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ {}^\forall\varepsilon > 0\ (\varepsilon \in \mathbb{Q}),\ {}^\exists N \in \mathbb{N},\ {}^\forall n \in \mathbb{N},$$

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon$$

この ε, N, n に対して，

$$|b_n - a_n| = |a_n - b_n| < \varepsilon \text{ より}$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Leftrightarrow \{b_n\} \sim \{a_n\}_{\text{〃}}$$

(ii) $\{a_n\} \sim \{a_n\}$

(☺) $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ □

(iii) $\{a_n\} \sim \{b_n\}, \{b_n\} \sim \{c_n\}$

$\Rightarrow \{a_n\} \sim \{c_n\}$ を示す。

仮定より、$^\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$)、を取る。このとき、

$$^\exists N_1 \in \mathbb{N}, \ ^\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$^\exists N_2 \in \mathbb{N}, \ ^\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ $N = \max\{N_1, N_2\}$ ととると、$^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N$

に対して、$|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$。

$$|a_n - c_n| = |a_n - b_n + b_n - c_n|$$

$$\leqq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{。} \quad \Box$$

この定義は、実数 $\mathbb{R}$ の元 a は、有理数の Cauchy 列であるということを意味する。（もはや、単なる数字ではなく、数列だった…）

<u>Def</u>（有理数と実数の関係）

$q \in \mathbb{Q}$ に対して、数列 $a_n = q$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) は Cauchy 列

($\because$ $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists N = 1 \in \mathbb{N}$, $^\forall n, {}^\forall m \geqq N \Rightarrow |a_n - a_m| = |q - q| = 0 < \varepsilon$ $\Box$)

であるから、$[q] = [a_n]$ は実数である。

$[q]$ と有理数 q を同じものだと捉える（同一視する）と、

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ とみなせる。

Prop (有理数のCauchy列の性質)

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を有理数のCauchy列とすると,

$\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{a_n / b_n\}$

(但し, b_n の極限は0でないとし, $b_n = 0$ となる

高々有限個な n については飛ばして考える.)

は, Cauchy列である。

(∵) $\{a_n + b_n\}$ について,

$^\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ を取り, 固定する。このとき,

$^\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $^\forall n, {}^\forall m \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$^\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $^\forall n, {}^\forall m \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ ととると,

$^\forall n, m \geqq N$ に対して, $|a_n - a_m| < \varepsilon$ かつ $|b_n - b_m| < \varepsilon$

よって

$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)|$

$\leqq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

従って $\{a_n + b_n\}$ はCauchy列。 □

$\{a_n - b_n\}$ について,

$^\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ を取り, 固定する。このとき,

$^\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $^\forall n, {}^\forall m \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$^\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $^\forall n, {}^\forall m \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ ととると、

$|(a_n - b_n) - (a_m - b_m)|$

$= |(a_n - a_m) + (b_m - b_n)|$

$\leqq |a_n - a_m| + |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

従って $\{a_n - b_n\}$ は Cauchy 列 □

$\{a_n b_n\}$ について

<u>Claim</u> $\{a_n\}$; cauchy 列 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ は有界

(∵) $\varepsilon = 1 > 0$ と取ると、仮定から、

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, \forall m \geqq N \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$

今、$m = N$ とすると、$\forall n \geqq N \Rightarrow |a_n - a_N| < 1$

$\forall n \geqq N$ に対して、$|a_n| = |a_n - a_N + a_N|$

$\leqq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ より、有界.

$1 \leq \forall n \leq N$ に対して、

$\tilde{M} := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|\}$ とおくと、

$|a_n| < M$ となる。以上から、$M := \max\{\tilde{M}, 1 + |a_N|\}$

とおくと、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n| < M$ □

$\{a_n\}, \{b_n\}$; cauchy 列だから、<u>Claim</u> より、

$\exists K_1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < K_1$

$\exists K_2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |b_n| < K_2$ が成り立つ K_1, K_2 を得る.

$\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in$ ㊤) を取り、固定すると、

$^\exists N_1 \in \mathbb{N},\ ^\forall n, ^\forall m \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2K_2}$

$^\exists N_2 \in \mathbb{N},\ ^\forall n, ^\forall m \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - b_m| < \dfrac{\varepsilon}{2K_1}$

となる。$N := \max\{N_1, N_2\}$ ととると、

$|a_n b_n - a_m b_m|$

$= |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m|$

$= |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)|$

$\leqq |a_n(b_n - b_m)| + |b_m(a_n - a_m)|$

$= |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m|$

$< K_1 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2K_1} + K_2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2K_2} = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

よって $\{a_n b_n\}$ は Cauchy 列である。

$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ については $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ が Cauchy 列であることを示せば良い。（としたら $\left\{a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}\right\}$ が Cauchy 列）

$b_n = 0$ となる高々有限個の数を抜いたものを改めて順に b_n とおくと、$b_n \neq 0$ $(^\forall n \in \mathbb{N})$、であり

この b_n もまた Cauchy 列である。今、b_n の極限が 0 ではないので、

$^\exists \varepsilon_0 > 0,\ ^\forall N \in \mathbb{N},\ ^\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 \geqq N \land |b_{n_0}| \geqq \varepsilon_0 \cdots (*)$

一方、b_n は Cauchy 列なので、この $\varepsilon_0 > 0$ に対し、

$^\exists N_1 \in \mathbb{N},\ ^\forall n, ^\forall m \geqq N_1 \Rightarrow |b_n - b_m| < \dfrac{\varepsilon_0}{2} \cdots (**)$

ここで，$n \geqq N_1$ を満たす任意の n を，$(*)$ の

N に代入すると，$\exists n_0 \in \mathbb{N}$，$n_0 \geqq n \land |b_{n_0}| \geqq \varepsilon_0$

となる n_0 が取れる。また，この $n_0 \geqq N_1$ を $(**)$ の m に代入すると，

$|b_n - b_{n_0}| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ を満たす。

従って，$\forall n \geqq N_1$ に対し，

$$|b_n| = |b_{n_0} - b_{n_0} + b_n| = |b_{n_0} - (b_{n_0} - b_n)|$$
$$\geqq ||b_{n_0}| - |b_{n_0} - b_n||$$
$$> \left||b_{n_0}| - \frac{\varepsilon_0}{2}\right| \geqq \left|\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right| = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

が成り立つ。

また，$1 \leqq \forall n \leqq N_1$ に対しては，

$\tilde{m} := \min\{|b_1|, |b_2|, \cdots, |b_{N_1}|\} > 0$ を選ぶと，

$|b_n| \geqq \tilde{m}$，以上から，$m := \min\{\tilde{m}, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$ と選ぶと，

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$|b_n| \geqq m > 0$.

今，$\forall \varepsilon > 0$ を取り，固定する。このとき，

$\exists N^* \in \mathbb{N}$，$\forall n, \forall m \geqq N^* \Rightarrow |b_n - b_m| < m^2 \varepsilon$

とできる。$\therefore \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_m}\right| = \frac{|b_n - b_m|}{|b_n||b_m|} < \frac{m^2\varepsilon}{m^2} = \varepsilon$

となり，$\{\frac{1}{b_n}\}$ は Cauchy 列である。□

(注) この prop により，$\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n b_n\}, \{a_n / b_n\} \in S/\sim$，

すなわち 実数 $\mathbb{R}$ の元であることが確認できた。

Def (実数の四則演算)

$[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ に対して, $[a_n]+[b_n] := [a_n+b_n]$

として実数の和を定める。なお,

差 $[a_n]-[b_n] := [a_n-b_n]$

積 $[a_n]\cdot[b_n] := [a_n b_n]$

商 $[a_n]/[b_n] := [a_n/b_n]$ と定める.

Prop この実数の演算の定義は well-defined.

つまり, $\{a_n\} \sim \{\hat{a}_n\}$, $\{b_n\} \sim \{\hat{b}_n\}$ であれば,

$[a_n+b_n] = [\hat{a}_n+\hat{b}_n]$

(∵) 仮定より, $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ に対して,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \hat{a}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \hat{b}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで, $[a_n+b_n] := \left\{ \{\tilde{a}_n+\tilde{b}_n\} \mid \{\tilde{a}_n+\tilde{b}_n\} \sim \{a_n+b_n\} \right\}$

(i.e., $\lim_{n\to\infty}\left((\tilde{a}_n+\tilde{b}_n)-(a_n+b_n)\right)=0$)

なので, $\{\hat{a}_n+\hat{b}_n\} \in [a_n+b_n]$ を示せば良い。

すなわち, $\lim_{n\to\infty}\left((\hat{a}_n+\hat{b}_n)-(a_n+b_n)\right)=0$ を示せば良い。

$N := \max\{N_1, N_2\}$ ととれて, $\forall n \geq N$ に対し,

$$|(\hat{a}_n+\hat{b}_n)-(a_n+b_n)| = |(\hat{a}_n-a_n)+(\hat{b}_n-b_n)|$$
$$\leq |a_n-\hat{a}_n| + |b_n-\hat{b}_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

prop　同様に、$\{a_n\} \sim \{\hat{a}_n\}$, $\{b_n\} \sim \{\hat{b}_n\}$ であれば、

$$[a_n - b_n] = [\hat{a}_n - \hat{b}_n]$$

$$[a_n b_n] = [\hat{a}_n \hat{b}_n]$$

$$[a_n / b_n] = [\hat{a}_n / \hat{b}_n]$$

(∵) $[a_n - b_n]$ について、仮定より、

$\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ に対して、

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - \hat{a}_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - \hat{b}_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ ととると、$\forall n \geqq N$ に対し

$$|(\hat{a}_n - \hat{b}_n) - (a_n - b_n)| = |(\hat{a}_n - a_n) + (b_n - \hat{b}_n)|$$

$$\leqq |a_n - \hat{a}_n| + |b_n - \hat{b}_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって、$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left((\hat{a}_n - \hat{b}_n) - (a_n - b_n) \right) = 0$ 。

$[a_n b_n]$ について、$\{a_n\}$, $\{\hat{b}_n\}$: Cauchy列より、

$\exists k_1 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| < k_1$

$\exists k_2 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\hat{b}_n| < k_2$,

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - \hat{a}_n| < \dfrac{\varepsilon}{2k_2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - \hat{b}_n| < \dfrac{\varepsilon}{2k_1}$

以上から $N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$\forall n \geqq N$ に対して、

$$|a_n b_n - \hat{a}_n \hat{b}_n| = |a_n b_n - a_n \hat{b}_n + a_n \hat{b}_n - \hat{a}_n \hat{b}_n|$$

$$= |a_n(b_n - \hat{b}_n) + \hat{b}_n(a_n - \hat{a}_n)|$$

$$\leqq |a_n||b_n - \hat{b}_n| + |\hat{b}_n||a_n - \hat{a}_n|$$

$$< K_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2K_1} + K_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2K_2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,//$$

$[a_n / b_n]$ について，$\{b_n\}$ は 0に収束しない，高々有限個な n については飛ばして考える Cauchy 列だと仮定する。

上の prop の議論より $\exists m > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \geqq m$.

$\forall \varepsilon > 0$ を取る。このとき，$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, \forall m \geqq N \Rightarrow |b_n - b_m| < m^2 \varepsilon$

とすると，$\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b_m}\right| = \dfrac{|b_n - b_m|}{|b_n||b_m|} < \dfrac{m^2 \varepsilon}{m^2} = \varepsilon \,//$ □

Def（実数の大小関係）$[a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ に対して，

○ $\exists c > 0$ ($c \in \mathbb{Q}$), $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N \Rightarrow a_n - b_n \geqq c$

となるとき，$[a_n] > [b_n]$ として実数の大小関係を定める。

同様に，$\exists c > 0$ ($c \in \mathbb{Q}$), $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N \Rightarrow b_n - a_n \geqq c$

となるとき，$[a_n] < [b_n]$ として，実数の大小関係を定める。

(注) $[a_n] = [b_n] \iff \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$

<u>Prop</u> ${}^\forall [a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$ に対して, $[a_n] > [b_n]$,

$[a_n] = [b_n]$, $[a_n] < [b_n]$ のいずれか一つのみが

成立する。さらに, これは well-defined.

i.e., $\{a_n\} \sim \{\hat{a}_n\}$, $\{b_n\} \sim \{\hat{b}_n\}$ のとき

$$[a_n] < [b_n] \Leftrightarrow [\hat{a}_n] \sim [\hat{b}_n]$$

(∵) ○ $[a_n] > [b_n]$ が成り立つと仮定すると,

${}^\exists c > 0 \,(c \in \mathbb{Q})$, ${}^\exists N_1 \in \mathbb{N}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N_1 \Rightarrow a_n - b_n \geqq c$.

$[a_n] = [b_n]$ も同時に成り立つと仮定すると

$\varepsilon = c > 0 \,(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ に対し,

${}^\exists N_2 \in \mathbb{N}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N_2 \Rightarrow |a_n - b_n| < c$

∴ $a_n - b_n < c$ となるが, $a_n - b_n \geqq c$ に矛盾。

よって, この2つは同時には成立しない。//

○ $[a_n] < [b_n]$ が成り立つと仮定すると,

${}^\exists c > 0 \,(c \in \mathbb{Q})$, ${}^\exists N_1 \in \mathbb{N}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N_1 \Rightarrow b_n - a_n \geqq c$

$[a_n] = [b_n]$ も同時に成り立つと仮定すると,

$\varepsilon = c > 0 \,(\varepsilon \in \mathbb{Q})$ に対して,

${}^\exists N_2 \in \mathbb{N}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N_2 \Rightarrow |a_n - b_n| < c$

∴ $-c < a_n - b_n \Leftrightarrow b_n - a_n < c$ となるが, $b_n - a_n \geqq c$

に矛盾。よって, この2つは同時には成立しない。

○ $[a_n] > [b_n]$ が成り立つと仮定すると、

$^\exists c_1 > 0\ (c \in \mathbb{Q}),\ ^\exists N_1 \in \mathbb{N},\ ^\forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geqq N_1 \Rightarrow a_n - b_n \geqq c_1$$

$[a_n] < [b_n]$ も成り立つと仮定すると

$^\exists c_2 > 0\ (c \in \mathbb{Q}),\ ^\exists N_2 \in \mathbb{N},\ ^\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geqq N_2 \Rightarrow b_n - a_n \geqq c_2$$

$a_n - b_n \geqq c_1 \Leftrightarrow 0 > -c_1 \geqq b_n - a_n$ となるが、

これは $b_n - a_n \geqq c_2 > 0$ に矛盾。よって、この2つも

同時には成立しない。

○ Well-defined について、$\{a_n\} \sim \{\hat{a}_n\},\ \{b_n\} \sim \{\hat{b}_n\}$

と仮定すると、$[a_n] < [b_n] \Longleftrightarrow [\hat{a}_n] < [\hat{b}_n]$ を示す。

$(\Rightarrow)$ $[a_n] < [b_n]$ と仮定する

このとき、$^\exists c > 0\ (c \in \mathbb{Q}),\ ^\exists N_1 \in \mathbb{N},\ ^\forall n \in \mathbb{N},$

$$n \geqq N_1 \Rightarrow b_n - a_n \geqq c$$

$\varepsilon = \frac{c}{4} > 0\ (\varepsilon \in \mathbb{Q})$ ととると、

$$^\exists N_2 \in \mathbb{N},\ ^\forall n \geqq N_2 \Rightarrow |a_n - \hat{a}_n| < \varepsilon = \frac{c}{4}$$

$$^\exists N_3 \in \mathbb{N},\ ^\forall n \geqq N_3 \Rightarrow |b_n - \hat{b}_n| < \varepsilon = \frac{c}{4}$$

このとき、$-\frac{c}{4} < a_n - \hat{a}_n < \frac{c}{4},\quad -\frac{c}{4} < b_n - \hat{b}_n < \frac{c}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{c}{4} - a_n < -\hat{a_n} < \frac{c}{4} - a_n, \quad -\frac{c}{4} - b_n < -\hat{b_n} < \frac{c}{4} - b_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{4} + a_n > \hat{a_n} > -\frac{c}{4} + a_n \quad \frac{c}{4} + b_n > \hat{b_n} > -\frac{c}{4} + b_n$$

$$\therefore \quad \frac{c}{4} + b_n - \hat{a_n} > \hat{b_n} - \hat{a_n} > -\frac{c}{4} + b_n - \hat{a_n}$$

$$\therefore \quad \frac{c}{2} + b_n - a_n > \hat{b_n} - \hat{a_n} > -\frac{c}{2} + b_n - a_n \geq \frac{c}{2}$$

となり，$[\hat{a_n}] < [\hat{b_n}]$ が成り立つ。

$(\Leftarrow)$ $\{a_n\}$ と $\{\hat{a_n}\}$，$\{b_n\}$ と $\{\hat{b_n}\}$ の記号を入れ替えれば 上の証明と全く同様である。 □

(注) $[a_n] > [b_n] \Leftrightarrow [\hat{a_n}] > [\hat{b_n}]$ も全く同様。

Prop 実数の和は有理数の和の拡張になっている。

つまり，$p, q, r \in \mathbb{Q}$ に対して，$p + q = r \Rightarrow [p] + [q] = [r]$

である。差・積・商，大小関係についても同様。

(☺) $p + q = r \Rightarrow [p] + [q] = [r]$ は，数列を

$$a_n = p, \quad b_n = q, \quad a_n + b_n = p + q = r \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とおくと，I の証明を適用できる。

差，積，商についても，全く同じ手法であり，大小関係についても 全く同様である。

<u>Def</u> (同一視) $^\forall [a_p] \in S/\sim = \mathbb{R}$ に対して,

四則演算, 大小関係は代表元 $\{a_p\} \in [a_p]$

の取り方に依らず成立するので, $\{a_p\} \in [a_p]$ と $[a_p]$

を同一視する。 i.e., $\{a_p\} = [a_p]$.

<u>Def</u> (有理数のCauchy列のなす列) (※添字を明記する)

2重有理数列 $\{a_{m,p}\}_{m\in\mathbb{N},\, p\in\mathbb{N}}$

$\left(\{a_{m,p}\}_{m\in\mathbb{N},\, p\in\mathbb{N}} := \{ a_{m,p} \in \mathbb{Q} \mid m\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N} \} \right)$

が有理数のCauchy列のなす列であるとは,

各 $m\in\mathbb{N}$ に対して, $\{a_{m,p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ が有理数のCauchy列

i.e., $^\forall m\in\mathbb{N},\ ^\exists\{a_{m,p}\}_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$; cauchy列.

ここで, $\{a_{m,p}\}_{m\in\mathbb{N},\, p\in\mathbb{N}} = \{\{a_{m,p}\}_{p\in\mathbb{N}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ と書く

こともある。

<u>Def</u> (有理数のCauchy列のなす列がCauchy列)

$\{\{a_{m,p}\}_{p\in\mathbb{N}}\}_{m\in\mathbb{N}} = \{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ がCauchy列

$\Leftrightarrow$ $^\forall[\varepsilon_p] > [0]$ に対して, $^\exists N\in\mathbb{N},\ ^\forall n\in\mathbb{N},\ ^\forall m\in\mathbb{N}$

$$n, m \geq N \Rightarrow -[\varepsilon_p] < [a_{n,p}] - [a_{m,p}] < [\varepsilon_p]$$

(注) $[\varepsilon_p] > [0] \Leftrightarrow {}^{\exists}c > 0 \ (c \in \mathbb{Q}),\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}n \in \mathbb{N},$

$n \geqq N \Rightarrow \varepsilon_p - 0 \geqq c$ であった。

${}^{\forall}[\varepsilon_p]$ とは，上記を満たす任意の有理数のCauchy列のこと。

<u>Def</u> (有理数のCauchy列のなす列の収束)

$[a_{m,p}] = \{a_{m,p}\}_{p\in\mathbb{N}}$

$\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ が $[\alpha_p]$ に収束するとは，

${}^{\forall}[\varepsilon_p] > [0],\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}m \in \mathbb{N},$

$$m \geqq N \Rightarrow -[\varepsilon_p] < [a_{m,p}] - [\alpha_p] < [\varepsilon_p]$$

が成り立つことを意味する。

<u>Thm</u> (実数の完備性)

有理数のCauchy列のCauchy列 $\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ は収束列

(☺) ${}^{\forall}m \in \mathbb{N}$ を取り，固定する。$[a_{m,p}] = \{a_{m,p}\}_{p\in\mathbb{N}}$

は有理数のCauchy列なので，

$2^{-m} > 0$ に対して，${}^{\exists}N(m) \in \mathbb{N}$，

$${}^{\forall}n_1,\ {}^{\forall}n_2 \geqq N(m) \Rightarrow |a_{m,n_1} - a_{m,n_2}| < 2^{-m} \cdots (*)$$

となる。 $N(m)$ を $N(1)+N(2)+\cdots+N(m)$ と置きかえても，

$(*)$ は成立することに注意する。

このとき、 $N(1) < N(2) < \cdots < N(m) < \cdots$

が成り立つ。次に、 $\{2^{-L-2}\}_{n\in\mathbb{N}} = (2^{-L-2}, 2^{-L-2}, \cdots)$ $(L\in\mathbb{N})$

は有理数の Cauchy 列 (i.e. $\{2^{-L-2}\}_{n\in\mathbb{N}} \in S \Rightarrow {}^{\exists}[2^{-L-2}] \in \mathbb{R}$)

$\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ は有理数の Cauchy 列の Cauchy 列 なので、

${}^{\forall}L \in \mathbb{N}$ に対して、 ${}^{\exists}M(L) \in \mathbb{N}$, ${}^{\forall}m_1 \in \mathbb{N}$, ${}^{\forall}m_2 \in \mathbb{N}$

$m_1, m_2 \geqq M(L) \Rightarrow -[2^{-L-2}] < [a_{m_1,p}] - [a_{m_2,p}] < [2^{-L-2}]$

となる。 $[a_p] < [b_p]$ の定義より 上記の $m_1, m_2 \geqq M(L)$

に対して、 ${}^{\exists}\tilde{N}(m_1, m_2) \in \mathbb{N}$, ${}^{\forall}n \geqq \tilde{N}(m_1, m_2)$

$$\Rightarrow -2^{-L-1} < a_{m_1,n} - a_{m_2,n} < 2^{-L-1}$$

となる。特に、 $n = N(m_1) + N(m_2) + \tilde{N}(m_1, m_2)$ ととると

$$|a_{m_1, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1,m_2)} - a_{m_2, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1,m_2)}| < 2^{-L-1} \cdots (1)$$

また、 (*) より $N(m_1) + N(m_2) + \tilde{N}(m_1, m_2) > N(m_1)$

$N(m_1) + N(m_2) + \tilde{N}(m_1, m_2) > N(m_2)$ なので、

$$|a_{m_1, N(m_1)} - a_{m_1, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1,m_2)}| < 2^{-m_1} \cdots (2)$$

$$|a_{m_2, N(m_2)} - a_{m_2, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1,m_2)}| < 2^{-m_2} \cdots (3)$$

今、${}^{\forall}L \in \mathbb{N}$に対して、$m_1, m_2 \geqq M(L)$も任意なので、

$m_1, m_2 \geqq L+2$となるように取り直せる.

このL, m_1, m_2に対しても(1), (2), (3)が成立するので、

$$
\begin{aligned}
&|a_{m_1, N(m_1)} - a_{m_2, N(m_2)}| \\
&= |a_{m_1, N(m_1)} - a_{m_1, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)} \\
&\quad + a_{m_1, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)} - a_{m_2, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)} \\
&\quad + a_{m_2, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)} - a_{m_2, N(m_2)}| \\
&\leqq |a_{m_1, N(m_1)} - a_{m_1, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)}| \\
&\quad + |a_{m_1, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)} - a_{m_2, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)}| \\
&\quad + |a_{m_2, N(m_1)+N(m_2)+\tilde{N}(m_1, m_2)} - a_{m_2, N(m_2)}| \\
&< 2^{-L-1} + 2^{-m_1} + 2^{-m_2} \underset{(m_1, m_2 \geqq L+2)}{<} 2^{-L}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $|a_{m_1, N(m_1)} - a_{m_2, N(m_2)}| < 2^{-L}$ となる.

ここで、$\{a_{L, N(L)}\}_{L \in \mathbb{N}}$は有理数のCauchy列となることを示そう。${}^{\forall}\varepsilon = \frac{L'}{L} > 0$ $(L, L' \in \mathbb{N})$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$と表したとき、

このL$\in\mathbb{N}$に対して $L < 2^L$だから、$2^{-L} < \frac{1}{L} \leqq \frac{L'}{L} = \varepsilon$となり.

上記のように L に対して ${}^\forall m_1, {}^\forall m_2 \geqq \max\{L+2, M(L)\}$ を取ると,

$$|a_{m_1, N(m_1)} - a_{m_2, N(m_2)}| < \varepsilon$$

となるので, $\{a_{L, N(L)}\}_{L\in\mathbb{N}}$ は有理数の Cauchy 列である。

$\therefore$ $\{a_{L, N(L)}\}_{L\in\mathbb{N}} \in S$。よって, $\{a_{L, N(L)}\}_{L\in\mathbb{N}}$ を代表元とする同値類 $[a_{p, N(p)}] \in \mathbb{R}$ を取ることができる.

次に, $\{[a_{m, p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ が $[a_{p, N(p)}]$ に収束することを示す.

${}^\forall[\varepsilon_p] > [0]$ を取ると, $[a_p] < [b_p]$ の定義から,

${}^\exists c > 0$ $(c\in\mathbb{Q})$, ${}^\exists N\in\mathbb{N}$, ${}^\forall p\in\mathbb{N}$,

$$p \geqq N \Rightarrow \varepsilon_p - 0 \geqq c.$$

この $c > 0$ $(c\in\mathbb{Q})$ に応じて, $2^{-L+1} < c$ となるように

$L\in\mathbb{N}$ を取ると, $\varepsilon_p \geqq c > 2^{-L+1}$ となる。ここで,

$\{2^{-L+1}\}_{n\in\mathbb{N}} = (2^{-L+1}, 2^{-L+1}, \cdots)$ $(L\in\mathbb{N})$ は有理数の Cauchy 列

なので, $\{2^{-L+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \in S \Rightarrow {}^\exists[2^{-L+1}] \in \mathbb{R}$,

よって $[\varepsilon_p] > [2^{-L+1}] > [0]$ が成立する $L\in\mathbb{N}$

が取れたことになる。

$$\{a_{m,p}\}_{p\in\mathbb{N}} = [a_{m,p}], \quad \{a_{L,N(L)}\}_{L\in\mathbb{N}} = [a_{p,N(p)}]$$

とする。上で定めた $L\in\mathbb{N}$ に対し、

$m, n \geqq \max\{L+2, M(L)\}$ となるように取ると、

$$|a_{m,N(m)} - a_{n,N(n)}| < 2^{-L} \text{ となる。ここで、}$$

mを固定すると、$(*)$ から、$\forall n \geqq N(m)$ に対して、

$$|a_{m,n} - a_{m,N(m)}| < 2^{-m} \text{ となるので、}$$

$$|a_{m,n} - a_{n,N(n)}|$$

$$= |a_{m,n} - a_{m,N(m)} + a_{m,N(m)} - a_{n,N(n)}|$$

$$\leqq |a_{m,n} - a_{m,N(m)}| + |a_{m,N(m)} - a_{n,N(n)}|$$

$$< 2^{-L} + 2^{-m} \underset{(m\geqq L+2)}{<} 2^{-L+1} \qquad (\forall n \geqq \max\{L+2, M(L), N(m)\})$$

従って、 $-[2^{-L+1}] < [a_{m,p}] - [a_{p,N(p)}] < [2^{-L+1}]$

が言えた。これより、 $[\varepsilon_p] > [2^{-L+1}] > [0]$ だったので、

$$-[\varepsilon_p] < -[2^{-L+1}] < [a_{m,p}] - [a_{p,N(p)}] < [2^{-L+1}] < [\varepsilon_p]$$

$$\Rightarrow \quad -[\varepsilon_p] < [a_{m,p}] - [a_{p,N(p)}] < [\varepsilon_p] \text{ となり}$$

$\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ は $[a_{p,N(p)}]$ に収束することが示された。□

この実数の完備性を用いて，(R17)を証明しよう。

(R17) $\iff$ Thm 1 より，Thm 1 を示す。

Thm 1（有界な単調非増加数列の性質）

$\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \doteqdot [k_p]$ を，有理数のCauchy列

$\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ を，有理数のCauchy列のなす列とする。

$$[a_{1,p}] \leqq [a_{2,p}] \leqq \cdots \leqq [a_{m,p}] \leqq \cdots \leqq [k_p]$$

が成り立つならば，$\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ は収束する。

(∵) $\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ が有理数のCauchy列のCauchy列であることを示せば良い。背理法で示す。

$\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ が有理数のCauchy列のCauchy列でなかったと仮定すると，

$$^\exists[\varepsilon_p] > [0],\ ^\forall N\in\mathbb{N},\ ^\exists n\in\mathbb{N},\ ^\exists m\in\mathbb{N}$$

$$(n > m \geqq N) \wedge ([a_{n,p}] - [a_{m,p}] \geqq [\varepsilon_p])$$

(但し，$[a_p] \leqq [b_p] \underset{def}{\iff} [a_p] < [b_p]$ or $[a_p] = [b_p]$)

となるが，$^\forall N\in\mathbb{N}$ より，これはCauchy列のなす列 $\{[a_{m,p}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ の階差が $[\varepsilon_p]$ を超えることが無限回あることを意味するので，$[a_{m,p}] \leqq [k_p]$ $(^\forall m\in\mathbb{N})$ に矛盾。□

以上から $\mathbb{R} := S/\sim$ は (R17) を満たすことが示された。

よって、今後 $[a_p] \in \mathbb{R}$ を通常の実数のように扱って

良いということになる。

5. 最大・最小・上限・下限

以下, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$とする.

Def $M \in \mathbb{R}$がAの最大元

$\iff$ $M \in A$であり, $\forall a \in A, \quad a \leq M$

Def $m \in \mathbb{R}$がAの最小元

$\iff$ $m \in A$であり, $\forall a \in A, \quad m \leq a$

prop 最大元は, 存在すれば唯一である.

$M, \tilde{M}$がAの最大元であると仮定すると,

$M \in A$であり, $\forall a \in A, \quad a \leq M$

$\tilde{M} \in A$であり, $\forall a \in A, \quad a \leq \tilde{M}$ が成立.

$M \in A, \tilde{M} \in A$なので, $M \leq \tilde{M}$ かつ $\tilde{M} \leq M$

$\iff M = \tilde{M} \quad \square$

prop 最小元は, 存在すれば唯一である

$m, \tilde{m}$がAの最小元であると仮定すると,

$m \in A$であり, $\forall a \in A, \quad m \leq a$

$\tilde{m} \in A$であり, $\forall a \in A, \quad \tilde{m} \leq a$ が成立

$m \in A, \tilde{m} \in A$なので, $m \leq \tilde{m}$ かつ $\tilde{m} \leq m$

$\iff m = \tilde{m} \quad \square$

上の2つの命題から, 上界 $U(A)$ の最小元である上限, 下界 $L(A)$ の最大元である下限の一意性 (唯一つの意味) が示される。

Prop $A, B \subset \mathbb{R}$ が空でないとする。

(i) A, B が上に有界 $\Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

(ii) A, B が下に有界 $\Rightarrow \inf(A+B) = \inf A + \inf B$

ここで, $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$

(☺) (i) $\sup A + \sup B < \sup(A+B)$ と仮定する。

$\varepsilon := \sup(A+B) - (\sup A + \sup B) > 0$ とおくと, sup の定義から,

$\exists c \in A+B$ s.t. $\sup(A+B) - \varepsilon < c < \sup(A+B)$

$\therefore \sup(A+B) - \big(\sup(A+B) - (\sup A + \sup B)\big) < c \leq \sup(A+B)$

$\Leftrightarrow \sup A + \sup B < c \leq \sup(A+B)$,

一方, $\forall a \in A$, $a \leq \sup A$, $\forall b \in B$, $b \leq \sup B$ より

$a+b \leq \sup A + \sup B < c$ となり,

$c \in A+B$ に矛盾。 $\therefore \sup A + \sup B \geq \sup(A+B)$

$\sup A + \sup B > \sup(A+B)$ と仮定する.

$\varepsilon := \frac{1}{2}\{\sup A + \sup B - \sup(A+B)\} > 0$ とおくと,

${}^{\exists} a \in A$ s.t. $\sup A - \varepsilon < a \leqq \sup A$

${}^{\exists} b \in B$ s.t. $\sup B - \varepsilon < b \leqq \sup B$

従って $(\sup A - \varepsilon) + (\sup B - \varepsilon) < a + b$

$\Leftrightarrow \sup A + \sup B - 2\varepsilon < a + b$

$\Leftrightarrow \sup(A+B) < a + b$ となる。

一方. ${}^{\forall} c \in A+B$, $c \leqq \sup(A+B)$ より

$c \leqq \sup(A+B) < a+b$ より, $a+b \in A+B$ に矛盾。

$\therefore \sup A + \sup B \leqq \sup(A+B)$

以上から, $\sup A + \sup B \geqq \sup(A+B)$

$\sup A + \sup B \leqq \sup(A+B)$

$\Leftrightarrow \sup A + \sup B = \sup(A+B)$

(ii) $\inf A + \inf B > \inf(A+B)$ と仮定する.

$\varepsilon := \inf A + \inf B - \inf(A+B) > 0$ とおくと.

${}^{\exists} c \in A+B$. $\inf(A+B) \leqq c < \inf(A+B) + \varepsilon$.

$\therefore \ \inf(A+B) \leqq c < \inf A + \inf B$.

一方. ${}^{\forall}a \in A,\ \inf A \leqq a,\quad {}^{\forall}b \in B.\ \inf B \leqq b$

より. $\quad c < \inf A + \inf B \leqq a+b$

となり. $c \in A+B$ に矛盾。よって, $\inf A + \inf B \leqq \inf(A+B)$

$\inf A + \inf B < \inf(A+B)$ と仮定する.

$\varepsilon := \frac{1}{2}\{\inf(A+B) - (\inf A + \inf B)\} > 0$ とおくと.

${}^{\exists}a \in A,\quad \inf A \leqq a < \inf A + \varepsilon$

${}^{\exists}b \in B,\quad \inf B \leqq b < \inf B + \varepsilon$

$\therefore \quad \inf A + \inf B \leqq a+b < \inf A + \inf B + 2\varepsilon$

$\therefore \quad a+b < \inf(A+B)$

一方. ${}^{\forall}c \in A+B,\quad \inf(A+B) \leqq c$ より,

$a+b \in A+B$ に矛盾。よって, $\inf A + \inf B \geqq \inf(A+B)$

以上から. $\inf A + \inf B = \inf(A+B)$ //

Prop $\quad A, B \subset [0, \infty)$ が空でないとする.

(i) A, B が上に有界 $\Rightarrow \sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$

(ii) A, B は下に有界であり. $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$

ここで, $\quad AB := \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$

((∵)) (i) $\sup A = 0$ のとき $A = \{0\}$ より，$\sup(AB) = 0$，

$\sup B = 0$ のとき，$B = \{0\}$ より $\sup(AB) = 0$ となる

ので，$\sup A = 0$ or $\sup B = 0$ のとき，$\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ //

以下，$\sup A > 0$，$\sup B > 0$ とする.

$\sup(AB) < \sup A \cdot \sup B$ と仮定すると，

$$\varepsilon := \frac{\sup A \cdot \sup B - \sup(AB)}{\sup A + \sup B} > 0 \text{ に対して，}$$

$$^{\exists} a \in A \text{ s.t. } \sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$$
$$^{\exists} b \in B \text{ s.t. } \sup B - \varepsilon < b \leq \sup B$$

ここで，
$$\sup A - \varepsilon = \frac{(\sup A)^2 + \sup A \cdot \sup B - \sup A \cdot \sup B + \sup(AB)}{\sup A + \sup B} > 0$$

$$\sup B - \varepsilon = \frac{\sup A \cdot \sup B + (\sup B)^2 - \sup A \cdot \sup B + \sup(AB)}{\sup A + \sup B} > 0$$

より，$(\sup A - \varepsilon)(\sup B - \varepsilon) < a \cdot b$

$\therefore$ $\sup A \cdot \sup B - \varepsilon(\sup A + \sup B) + \varepsilon^2 < ab$

$\therefore$ $\sup(AB) + \varepsilon^2 < a \cdot b$ $\therefore$ $\sup(AB) < a \cdot b$.

一方，$^{\forall} c \in AB$ に対して，$c \leq \sup(AB)$，より $c \leq \sup(AB) < ab$

これは，$ab \in AB$ に矛盾。よって，$\sup(AB) \geq \sup A \cdot \sup B$

$\sup(AB) > \sup A \cdot \sup B$ と仮定すると，

$\varepsilon := \sup(AB) - \sup A \cdot \sup B > 0$ に対して，

${}^{\exists} c \in AB$ s.t. $\sup(AB) - \varepsilon < c \leq \sup(AB)$

$\therefore \sup A \cdot \sup B < c$

一方，${}^{\forall} a \in A$, $a \leq \sup A$, ${}^{\forall} b \in B$, $b \leq \sup B$

となるので，$0 \leq a$, $0 \leq b$ から，

$a \cdot b \leq \sup A \cdot \sup B$ となるが，

$a \cdot b \leq \sup A \cdot \sup B < c$ であり，これは

$c \in AB$ に矛盾。よって $\sup(AB) \leq \sup A \cdot \sup B$

以上から，$\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$。

(ii) $\inf A = 0$ のときを考える。

${}^{\forall} b \in B$ を取り，固定すると，$b \geq 0$。inf の定義から，

${}^{\forall} \varepsilon > 0$ に対して，${}^{\exists} a \in A$ s.t. $0 \leq a < \dfrac{\varepsilon}{b}$

$\therefore 0 \leq ab < \varepsilon$ となるので，$\inf(AB) = 0$.

$\therefore \inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$。

$\inf B = 0$ のときも同様で，${}^{\forall} a \in A$ を取る。$(a \geq 0)$

${}^{\forall} \varepsilon > 0$ に対して，${}^{\exists} b \in B$ s.t. $0 \leq b < \dfrac{\varepsilon}{a}$

$\therefore 0 \leq ab < \varepsilon$ となるので，$\inf(AB) = 0$.

$\therefore \inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$。

$\inf A > 0,\quad \inf B > 0$ とする。

$\inf(AB) < \inf A \cdot \inf B$ と仮定すると

$\varepsilon := \inf A \cdot \inf B - \inf(AB) > 0$ に対して

$\exists c \in AB$ s.t. $\inf(AB) \leqq c < \inf(AB) + \varepsilon$

$\therefore \inf(AB) \leqq c < \inf A \cdot \inf B$

一方, $\forall a \in A,\ \inf A \leqq a,\quad \forall b \in B,\ \inf B \leqq b$ より

$\inf A \cdot \inf B \leqq a \cdot b$

$\therefore\ c < \inf A \cdot \inf B \leqq a \cdot b$ となるが, これは $c \in AB$ に矛盾。

$\inf(AB) > \inf A \cdot \inf B$ と仮定すると,

$4(\inf(AB) - \inf A \cdot \inf B) > 0$

$\therefore\ -2\inf A \cdot \inf B + 4\inf(AB) > 2\inf A \cdot \inf B$

$\therefore\ (\inf A)^2 - 2\inf A \cdot \inf B + (\inf B)^2 + 4\inf(AB)$

$> (\inf A)^2 + 2\inf A \cdot \inf B + (\inf B)^2$

$\therefore\ (\inf A - \inf B)^2 + 4\inf(AB) > (\inf A + \inf B)^2$

$\sqrt{x}$ は単増, $|x| := \sqrt{x^2}$ $\rightarrow$ $\therefore\ \sqrt{(\inf A - \inf B)^2 + 4\inf(AB)} > |\inf A + \inf B| = \inf A + \inf B$

よって $\varepsilon := \dfrac{-(\inf A + \inf B) + \sqrt{(\inf A - \inf B)^2 + 4 \cdot \inf(AB)}}{2} > 0$ とおける。

このとき,

$^{\exists}a \in A$ s.t. $\inf A \leq a < \inf A + \varepsilon$

$^{\exists}b \in B$ s.t. $\inf B \leq b < \inf B + \varepsilon$,

であり、 $ab < (\inf A + \varepsilon)(\inf B + \varepsilon)$

$\therefore\ ab < \inf A \cdot \inf B + \varepsilon(\inf A + \inf B) + \varepsilon^2$.

ここで、

$$\varepsilon = \frac{-(\inf A + \inf B) + \sqrt{(\inf A + \inf B)^2 - 4(\inf A \cdot \inf B - \inf(AB))}}{2}$$

なので、ε は $x^2 + x(\inf A + \inf B) + (\inf A \cdot \inf B - \inf(AB)) = 0$

の解の1つである。すなわち

$$\varepsilon^2 + \varepsilon(\inf A + \inf B) + \inf A \cdot \inf B = \inf(AB)$$

$\therefore\ ab < \varepsilon^2 + \varepsilon(\inf A + \inf B) + \inf A \cdot \inf B = \inf(AB)$

となり、$\inf A \cdot \inf B \leq ab < \inf(AB)$ が言えた。

一方、$^{\forall}c \in AB$, $\inf(AB) \leq c$ となるので、

$ab < \inf(AB) \leq c$. これは $ab \in AB$ に矛盾。

よって、 $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$ $\square$

§2 上極限・下極限

<u>Def</u> $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ と書く。

$\overline{\mathbb{R}}$ を補完線直線という。

<u>Def</u> 上に有界でない集合 $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ に対して, $\sup A = +\infty$.

下に有界でない集合 $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ に対して, $\inf A = -\infty$

と定める。こうすると,

$\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ に対して, 上限・下限が常に定まる。

極限として $\pm\infty$ も考えれば, 次の prop を得る。

<u>Prop</u> (i) 任意の単調非減少実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について,

極限 $a \in \overline{\mathbb{R}}$ が存在する。同様に,

(ii) 任意の単調非増加実数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ についても,

極限 $b \in \overline{\mathbb{R}}$ が存在する。

(☺) (i) から示す。上に有界な任意の単調非減少数列は

<u>Thm</u> によって収束する。そこで, 上に有界でない任意の単調

非減少数列を取ると, $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して, $\exists N(m) \in \mathbb{N}$

s.t. $a_{N(m)} > m$。今, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(m)$ に対して

$a_{N(m)} \leq a_n$ なので, $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して, $\exists N(m) \in \mathbb{N}$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(m) \Rightarrow a_n > m$. よって $a_n \to +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$

(ii) 下に有界な単調非増加数列は収束するので，
下に有界でない単調非増加数列について考える。
$^\forall m \in \mathbb{Z}$ に対して，$^\exists N(m) \in \mathbb{N}$. s.t. $b_{N(m)} < m$.
今，$^\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqq N(m)$ に対して，$b_n \leqq b_{N(m)}$ なので，
$^\forall m \in \mathbb{Z}, {}^\exists N(m) \in \mathbb{N}, {}^\forall n \in \mathbb{N}, \Rightarrow b_n \leqq m$.
よって，$b_n \to -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$. □

<u>Prop</u> 任意の実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，ある $a \in \overline{\mathbb{R}}$ と
部分列が存在し，部分列は a に収束する

(∵) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界の場合は証明済みなので，
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界でない場合を考える。
(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界でない場合，
$^\forall m \in \mathbb{N}$ に対し，$^\exists N(m) \in \mathbb{N}$, $a_{N(m)} > m$.
ここで，$a_n > m$ を満たす項は無限個存在する。
もし，$a_n > m$ を満たす項が有限個しかないと仮定すると，
$^\exists M \in \mathbb{R}$, $M = \max\{a_n \mid a_n > m\}$ となり，a_nが非有界
であることに矛盾。従って，$a_n > m$ を満たす項は無限個
存在する。よって，$N(m) < N(m+1) < \cdots$ と，各 $m \in \mathbb{N}$ に
対し $N(m)$ が単調増加数列となるように取れる。

よって、部分列 $\{a_{N(m)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

$a_{N(m)} \to +\infty \ (m \to +\infty)$ となり、従って $+\infty \in \overline{\mathbb{R}}$

に収束する部分列が取れたことになる。

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が下に有界でない場合。

$^\forall m \in \mathbb{Z}$ に対し、$^\exists N(m) \in \mathbb{N}$ s.t. $a_{N(m)} < m$

ここで、$a_n < m$ を満たす項が有限個しかないと

仮定すると、$^\exists M = \min\{a_n \mid a_n < m\}$ となり、

a_n が下に有界でないことに矛盾。従って、$m \in \mathbb{N}$

対応する $N(m)$ より、$m+1 \in \mathbb{N}$ に対応する $N(m+1)$ で

$N(m)$ よりも大きい $N(m+1)$ が取れる。すなわち、帰納的に、

$$N(1) < N(2) < \cdots < N(m) < N(m+1) < \cdots$$

と、$N(m)$ が単調増加数列となるように出来る。

よって、部分列 $\{a_{N(m)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

$a_{N(m)} \to -\infty \ (m \to +\infty)$ となり、$-\infty \in \overline{\mathbb{R}}$

に収束する部分列が取れたことになる。 □

Def (上極限・下極限)

実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対して,

$$A_n := \{a_m \mid m \geqq n\},\quad l_n := \sup A_n \in \overline{\mathbb{R}}$$

とすると, $A_n \supset A_{n+1} \supset A_{n+2} \supset \cdots$ となるので, 講義中に示したpropより, $\sup A_n \geqq \sup A_{n+1} \geqq \sup A_{n+2} \geqq \cdots$

すなわち, $l_n \geqq l_{n+1} \geqq l_{n+2} \geqq \cdots$ となる。これは

$\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調非増加列であることを示している。

従って, prop より, 必ず極限 $l \in \overline{\mathbb{R}}$ が存在する。

この極限 l を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の上極限と呼び,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{or} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = l$$

と書く。

同様に, $m_n := \inf A_n \in \overline{\mathbb{R}}$ とすると.

$A_n \supset A_{n+1} \supset A_{n+2} \supset \cdots$ より

$\inf A_n \leqq \inf A_{n+1} \leqq \inf A_{n+2} \leqq \cdots$ となるので,

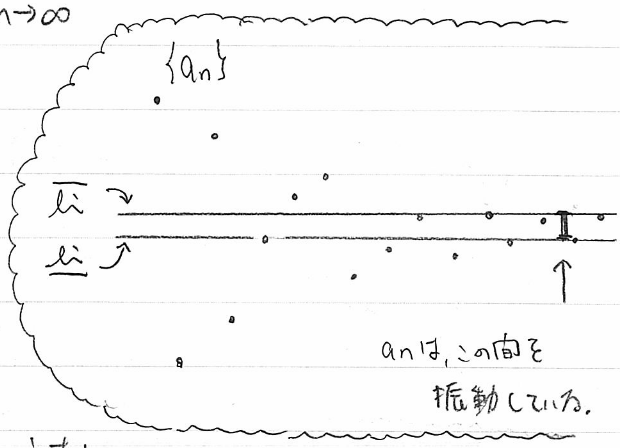
$m_n \leqq m_{n+1} \leqq m_{n+2} \leqq \cdots$ となる。

これは $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調非減少列であることを示している.

従って prop より, 必ず極限 $m \in \overline{\mathbb{R}}$ が存在する.

この極限 $m\in\overline{\mathbb{R}}$ を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の下極限と呼び、

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = m, \quad \text{or} \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n = m$$ と書く。



Thm 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ と $l\in\overline{\mathbb{R}}$ に対し、次の(a)〜(d)は同値。

(a) $l = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$

(b) (i) $\forall x\in\overline{\mathbb{R}}$, $l<x$ に対し、

$\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqq N \Rightarrow a_n < x$

(ii) $\forall y\in\overline{\mathbb{R}}$, $y<l$ に対し、

$y<a_n$ となる $n\in\mathbb{N}$ は無限個ある。

(c) l に収束する部分列 $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在する。また、$\forall x\in\mathbb{R}$, $l<x$ となる x に収束する部分列は存在しない。

(d) l は $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の $\overline{\mathbb{R}}$ での集積点 (⇔ 部分列 $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ の極限として得られる値) の中で最大のものである。

(☺) (a) ⇒ (b)

(i) を示す。 $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ と仮定する。

○ $l = +\infty$ の場合, $+\infty < x$ となる $x \in \overline{\mathbb{R}}$ は存在しない。

○ $l = -\infty$ の場合, $-\infty < x$ となる $x \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し,

$^\exists M \in \mathbb{N}, {}^\forall m \in \mathbb{N}, m \geqq M \Rightarrow l_m < x$ となる。(☺単減)

また, $l_m := \sup A_m := \sup\{a_n \mid n \geqq m\}$ より, $^\forall n \geqq m$ に対し

$a_n \leqq l_m$。よって, $^\forall n \geqq M \Rightarrow a_n < x$ が成り立つ.

○ $l \in \mathbb{R}$ の場合, $x = +\infty$ であれば,

$^\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < +\infty$ となるので, b(i) を満たす。

$^\forall x \in \mathbb{R}$, $l < x$ のときを考える。

$\varepsilon := \dfrac{x-l}{2} > 0$ ととると, $l_m \to l \ (m \to \infty)$ より

$^\exists M \in \mathbb{R}, {}^\forall m \in \mathbb{R}, m \geqq M \Rightarrow |l_m - l| < \varepsilon$

$l \leqq l_m \ ({}^\forall m \in \mathbb{N})$ に気を付けると, $l_m - l < \varepsilon$.

$$\therefore l_m = (l_m - l) + l < \frac{x-l}{2} + l = \frac{x+l}{2} < \frac{x+x}{2} = x$$

より, $^\forall m \geqq M \Rightarrow l_m < x$。今, $l_m := \sup A_m$

だったので, $^\forall n \in \mathbb{N}, n \geqq m \Rightarrow a_n \leqq l_m$。

よって, $^\forall n \geqq M \Rightarrow a_n < x$ が言える。

(ii) を示す。

○ $l=-\infty$ の場合，$y<-\infty$ を満たす $y\in\overline{\mathbb{R}}$ は存在しない。

○ $l=+\infty$ の場合，$\{l_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は単調非増大だったので，

$l_m\equiv+\infty$ である。よって，$^\forall y\in\overline{\mathbb{R}}$，$y<+\infty$ に対し，

$^\forall m\in\mathbb{N}$，$y<l_m$。$l_m:=\sup A_m$ より

$^\exists a_n\in A_m\ (n\geqq m)$ s.t. $y<a_n<\underset{(=+\infty)}{l_m}$，よって，

これが $^\forall m\in\mathbb{N}$ に対して成り立つので，

$y<a_n$ となる $n\in\mathbb{N}$ は無限個存在する。

○ $l\in\mathbb{R}$ の場合，$y=-\infty$ であれば，

$^\forall n\in\mathbb{N}$，$y=-\infty<a_n$ となるので，l (ii) を満たす

$y\in\mathbb{R}$，$y<l$ の場合。$l\leqq l_m$ に注意すると，

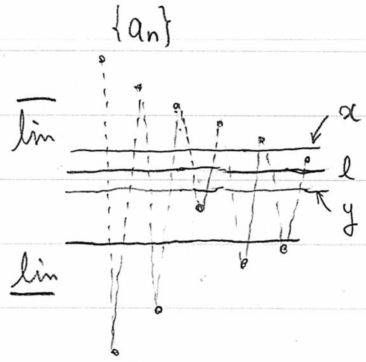
$^\forall m\in\mathbb{N}$ に対して $\varepsilon:=\dfrac{l_m-y}{2}>0$ ととると，

$l_m:=\sup A_m$ より $^\exists a_n\in A_m$ s.t.

$l_m-\varepsilon<a_n\leqq l_m\quad(n\geqq m)$

∴ $l_m-\varepsilon=\dfrac{l_m+y}{2}>\dfrac{y+y}{2}=y$ より

$y<a_n\leqq l_m$ が成立。



($\overline{\lim}$，$\underline{\lim}$ のイメージ)

$^\forall m\in\mathbb{N}$ に対してこれが成り立つ n が取れるので，

l (ii) が成り立つ。□

(ii) ⇒ (c)　$\forall \varepsilon > 0$ を取り，固定する．$\forall L \in \mathbb{N}$，$\frac{1}{L} < \varepsilon$ とする。

(ii) より，$x := l + \frac{1}{L} > l$ とおくと，$\exists N \in \mathbb{N}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，

$$n \geqq N \Rightarrow a_n < x \quad (\text{注；} x > -\infty \text{ である．})$$

$$\therefore a_n < x = l + \frac{1}{L} \quad \therefore a_n - l < \frac{1}{L}$$

一方．$y := l - \frac{1}{L} < l$ とおくと，(ii) より，$y < a_n$ となる

(注；$y < +\infty$ である．)

n は無限個存在する。この n 全体を $Y_L \subset \mathbb{N}$ とおくと，

Y_L は上に有界でないので，$\exists n_L \in Y_L$ s.t. $n_L \geqq N$。

よって $y < a_{n_L}$　$\therefore$　$l - \frac{1}{L} < a_{n_L} \Leftrightarrow -\frac{1}{L} < a_{n_L} - l$

であり，一方 $a_{n_L} - l < \frac{1}{L}$　($\because$ $n_L \geqq N$) なので

$$|a_{n_L} - l| < \frac{1}{L} < \varepsilon.$$

よって $\frac{1}{L} < \varepsilon$ となる L であれば上の議論が適用できるので，

$\frac{1}{L} < \varepsilon$ を満たす最小の L を $\tilde{L}$ とおくと，

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \tilde{L} \in \mathbb{N}$，$\forall L \in \mathbb{N}$，$L \geqq \tilde{L} \Rightarrow |a_{n_L} - l| < \varepsilon$

よって部分列 $\{a_{n_L}\}_{L \in \mathbb{N}}$ は l に収束する。

また，$\forall x \in \mathbb{R}$，$l < x$ を取り，固定する．

$\varepsilon := \frac{x - l}{2} > 0$ とおく。$x - \varepsilon = \frac{x + l}{2} > \frac{l + l}{2} = l$ であるから

$\exists N \in \mathbb{N}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，$n \geqq N \Rightarrow a_n < x - \varepsilon$．よって，$a_n - x < -\varepsilon$

$\therefore$ $|a_n - x| > \varepsilon$ となり，x に収束する部分列は存在しない。

(c) $\Rightarrow$ (d)

Def　$p \in \overline{\mathbb{R}}$ が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ の集積値

$\Leftrightarrow$ 部分列 $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ の極限として得られる値

$\Leftrightarrow$ $^\forall\varepsilon>0$ に対して，$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ は $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の点を無限個含む。

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ の集積値全体の集合を A とする。

$l \in A$ であることを示す。(c) より

$^\exists\{a_{n_L}\}_{L\in\mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.t. $a_{n_L} \to l$ $(L\to\infty)$ より，

$^\forall\varepsilon>0$ に対し $^\exists\tilde{L}\in\mathbb{N}$, $^\forall L\in\mathbb{N}$, $L \geqq \tilde{L} \Rightarrow |a_{n_L}-l|<\varepsilon$

となるので，$l \in A$.

$l = \max A$ であることを示す。$^\forall\tilde{l}\in A$, $\tilde{l}>l$ を取る。

このとき，(c) により，$\tilde{l}$ に収束する部分列は存在しない。

すなわち，$^\exists\varepsilon_0>0$, $^\exists N\in\mathbb{N}$, $^\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geqq N \Rightarrow |a_n-\tilde{l}| \geqq \varepsilon_0$.

よって，$a_n-\tilde{l} \leqq -\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \leqq a_n-\tilde{l}$

$\Leftrightarrow$ $a_n \leqq \tilde{l}-\varepsilon_0$, $\tilde{l}+\varepsilon_0 \leqq a_n$　$(^\forall n \geqq N)$

このことは，補集合 $(\tilde{l}-\varepsilon_0, \tilde{l}+\varepsilon_0)$ には $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の点が有限個しかないことを意味するので，$\tilde{l}\in A$ より，矛盾。よって l は集積値の中で最大のものである。

(d) ⇒ (a)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対して、$A_n := \{a_m \mid m \geqq n\}$、

$l_n := \sup A_n \in \overline{\mathbb{R}}$ とする。l_n は単調非増加列であり、

極限値 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ が存在する。

$l = \max A$ と仮定する。背理法で示す。

$l < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ と仮定する。

l_n は単調非増加数列なので、

$l_n \geqq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$。ここで、${}^\forall \varepsilon > 0$ を取る。

$l_n = \sup A_n$ より、

${}^\exists a_m \in A_n$ s.t. $l_n - \varepsilon < a_m \leqq l_n$ $(m \geqq n)$

となる a_m が、${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して取れる。

また、この ε に対して、${}^\exists N \in \mathbb{N}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$

$n \geqq N \Rightarrow \varepsilon > l_n - \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \geqq 0$ $\therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon > l_n$

$\therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon \leqq l_n - \varepsilon < a_m < l_n < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon$

となる a_m が ${}^\forall n \geqq N$ に対して取れることになるので ${}^\forall \varepsilon > 0$

に対し $(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} + \varepsilon)$ に a_m が無限個存在。

$\therefore \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \in A$。よって、$l = \max A$ に矛盾。

$l > \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ と仮定する。$l \in A$ より $\varepsilon := \dfrac{l - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n}{2} > 0$ と

おくと, $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$ に $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の元が無限個存在。

従って, ${}^{\forall} n \in \mathbb{N}$ に対して $l_n = \sup\{a_m \mid m \geqq n\} \geqq l - \varepsilon$.

従って, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \geqq l - \varepsilon$ となるが

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \geqq l - \varepsilon = \frac{l + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n}{2} > \frac{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n}{2} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

より, 矛盾。よって, $l = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$

(注)

(a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) が示されたので,

どの命題から出発しても, (a)~(d) が成立。よって

(a) ~ (d) は同値である。 $\square$

$$\begin{tikzcd} & (a) \arrow[dl, Rightarrow] & \\ (b) \arrow[dr, Rightarrow] & & (d) \arrow[ul, Rightarrow] \\ & (c) \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ についても同様の定理が成立するが, 主張を述べるに留める。証明は符号を変えるだけで同様である。

Thm $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ と $l \in \overline{\mathbb{R}}$ に対し, 次は同値。

(a) $l = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$

(b) (i) $l < x$ となる任意の $x \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して, $a_n < x$ となる n は無限個存在。

(ii) $y < l$ となる任意の $y \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して, 十分大きな全ての n に対して, $y < a_n$.

(c) l に収束する部分列が存在する。$y < l$ なる y に収束する部分列は存在しない。

(d) l は $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の $\overline{\mathbb{R}}$ での集積値の中で最小のものである。

(注) (a) ⇒ (c) において, $l = -\infty$ のとき.

(a)において, a(i) しか成立しないことに注意しよう.

任意の部分列が $-\infty$ に収束することを示す.

$\forall x > -\infty$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow x > a_n$

より. $a_n \to -\infty$ $(n \to -\infty)$ となる。よって.

任意の部分列 $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が

$l = -\infty$ に収束。よって $-\infty < {}^\forall x$ には部分列は収束しない。

$l = +\infty$ のとき, a(ii) しか成立しない。$\forall m \in \mathbb{N}$

$m < +\infty$ に対して, $m < a_n$ となる n が無限個

存在するため, その1つを $a_{N(m)}$ ととる。$m+1$ に対しても

同様に. $m+1 < +\infty$ より. $m+1 < a_n$ となる n が

無限個存在。従って. $N(m) < N(m+1)$ となるように取れる.

以降, 順に m を増して行くと. $N(1) < N(2) < \cdots < N(m) < \cdots$

なる単調増加数列が取れる。ゆえに, 部分列 $\{a_{N(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ は

$m < a_{N(m)}$ を満たすので, $a_{N(m)} \to +\infty$ $(m \to +\infty)$。

また, $+\infty < x$ を満たす $x \in \overline{\mathbb{R}}$ は存在しない。

(c) ⇒ (d) においては, $l = +\infty$ のとき $l < \overline{\lim_{n \to \infty}} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ は

存在しないので, 片方のみで良い。$l = -\infty$ も同様で, $\underline{\lim_{n \to \infty}} a_n < l$

を満たす $\overline{\mathbb{R}}$ は存在しないので, 片方のみで良い。

ここで、$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ が ε-δ論法を用いずに定義できることに注意しておく。すなわち

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対し、$A_n := \{a_m \mid m \geqq n\}$, $l_n := \sup A_n$

と定義すると、l_n は単調非増加数列であり、$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ は

l_n の極限だから、$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf\{\sup A_n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ となる。

$\inf\{\sup A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ を $\inf_{n\in\mathbb{N}}(\sup A_n)$ と書くことがある。同様に、

$\sup A_n = \sup\{a_m \mid m \geqq n\}$ を $\sup_{m\geqq n} a_m$ と書くので

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{m\geqq n} a_m\right)$$ となり、ε-δ論法を

用いずとも上極限が表せる。同様に、下極限に対しても、

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対し、$A_n := \{a_m \mid m \geqq n\}$, $m_n := \inf A_n$

と定義すると、m_n は単調非減少数列であり、$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ は

m_n の極限だから、$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup\{\inf A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ となる。

やはり $\sup\{\inf A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ を $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{m\geqq n} a_m\right)$ と書くと、

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{m\geqq n} a_m\right)$$ となり、ε-δ論法を

用いずとも下極限が表せる。次の命題は、ε-δ論法による極限を $\sup$, $\inf$ を用いて表せるという重要な命題である。

~~Prop~~ 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対して，次は同値．

(i) a_n は収束する．

(ii) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$

(∵) ((i) ⇒ (ii)) a_n は収束する

$\Leftrightarrow$ $^\exists \alpha \in \mathbb{R}, {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall n \in \mathbb{N}$

$n \geqq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$ である．

$A_n := \{a_m \mid m \geqq n\}$, $l_n := \sup A_n$ とおくと．

$A_N := \{a_m \mid m \geqq N\}$, $l_N := \sup A_N$ であり，仮定から

$^\forall m \geqq N \Rightarrow -\varepsilon < a_m - \alpha < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \alpha - \varepsilon < a_m < \alpha + \varepsilon$ となるので；

$l_N = \sup\{a_m \mid m \geqq N\} \leqq \alpha + \varepsilon$。

一方．$m_n := \inf A_n$ とおくと，$m_N := \inf A_N$ なので

$m_N = \inf\{a_m \mid m \geqq N\} \geqq \alpha + \varepsilon$.

∴ $\alpha - \varepsilon \leqq m_N \leqq l_N \leqq \alpha + \varepsilon$ となる。

よって，$-\varepsilon \leqq m_N - \alpha \leqq l_N - \alpha \leqq \varepsilon$。

<u>Claim</u> $\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$

(☺) $A_n := \{a_m \mid m \geq n\}$, $l_n := \sup A_n$, $m_n := \inf A_n$

とおく。$U(A_n) \cap L(A_n) = \phi$ より

$\inf A_n \leq \sup A_n \iff m_n \leq l_n$.

よって、講義中に示したpropより $\lim_{n\to\infty} m_n \leq \lim_{n\to\infty} l_n$

$$\iff \varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n \quad \square$$

$m_N \leq \varliminf_{n\to\infty} a_n$, $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq l_N$ より

$$-\varepsilon \leq m_N - \alpha \leq \varliminf_{n\to\infty} a_n - \alpha$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{claim}}}{\leq} \varlimsup_{n\to\infty} a_n - \alpha \leq l_N - \alpha \leq \varepsilon.$$

$^\forall\varepsilon > 0$ に対して上の不等式が成立するから

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n - \alpha = \varlimsup_{n\to\infty} a_n - \alpha = 0$$

$$\therefore \varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \alpha \ //$$

((ii) ⇒ (i))

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$$

$\iff \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geq n} a_m \right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\geq n} a_m \right)$ と仮定する。

$^\forall \varepsilon > 0$ を取り、固定する。このとき、

$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{m\geqq N} a_m \right) = \inf \{ \sup A_n \mid n\in\mathbb{N} \}$ の定義から

$^\exists N_1 \in \mathbb{N}$. s.t.

$$\inf\{\sup A_n \mid n\in\mathbb{N}\} \leqq \sup A_{N_1} < \inf\{\sup A_n \mid n\in\mathbb{N}\} + \varepsilon$$

すなわち、$^\forall n \geqq N_1$ に対して

$$\inf\{\sup A_n \mid n\in\mathbb{N}\} \leqq a_n < \inf\{\sup A_n \mid n\in\mathbb{N}\} + \varepsilon$$

$$\therefore \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqq a_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon$$

同様に、$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{m\geqq N} a_m \right) = \sup \{ \inf A_n \mid n\in\mathbb{N} \}$ の定義から

$^\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$\sup\{\inf A_n \mid n\in\mathbb{N}\} - \varepsilon < \inf A_{N_2} \leqq \sup\{\inf A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

すなわち、$^\forall n \geqq N_2$ に対して、

$$\sup\{\inf A_n \mid n\in\mathbb{N}\} - \varepsilon < a_n \leqq \sup\{\inf A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

$$\therefore \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon < a_n \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

よって、$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$^\forall n \geqq N$ に対して、

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon < a_n \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqq a_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon.$$

$$\therefore \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n - \varepsilon < a_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\varepsilon < a_n - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left| a_n - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \right| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left| a_n - \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \right| < \varepsilon$$

となるので，a_n は $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ に収束する。

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ や，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

は，任意の実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して存在するので，

$\lim_{n\to\infty} a_n$ よりも大雑把に考えられてとても便利である。

なお，$n\to\infty$ を省略して，(明らかな場合は)

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$ や，$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$

と書くこともある。

次の命題は, $\varlimsup$, $\varliminf$ に関する重要な性質である.

Prop 任意の実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ に対して, 次が成立する.

$$\varliminf a_n + \varliminf b_n \le \varliminf (a_n+b_n) \qquad (1)$$

$$\varliminf (a_n+b_n) \le \begin{array}{l} \varliminf a_n + \varlimsup b_n \\ \varlimsup a_n + \varliminf b_n \end{array} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{l} \varliminf a_n + \varlimsup b_n \\ \varlimsup a_n + \varliminf b_n \end{array} \le \varlimsup (a_n+b_n) \qquad (3)$$

$$\varlimsup (a_n+b_n) \le \varlimsup a_n + \varlimsup b_n \qquad (4)$$

特に, $\lim b_n$ が存在するときは,

$$\varliminf (a_n+b_n) = \varliminf a_n + \lim b_n \qquad (5)$$

$$\varlimsup (a_n+b_n) = \varlimsup a_n + \lim b_n \qquad (6)$$

(☺) $A_m := \{ a_n \mid n \geq m \}$, $B_m := \{ b_n \mid n \geq m \}$

$A_m + B_m := \{ a_n + b_n \mid n \geq m \}$ とおく。

(1) から順に示す。

${}^\forall n \geq m$ に対して

$$\inf A_m + \inf B_m \leq a_n + b_n$$

$$\therefore \ \inf A_m + \inf B_m \leq \inf (A_m + B_m) \quad ({}^\forall m \in \mathbb{N}) \cdots (1)$$

ここで、${}^\forall A, {}^\forall B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ に対して、prop より、

$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ なので、

$$\sup(\{ \inf A_m + \inf B_m \mid m \in \mathbb{N} \}) = \sup(\{ \inf A_m \mid m \in \mathbb{N} \}) + \sup(\{ \inf B_m \mid m \in \mathbb{N} \})$$

となる。従って、

$$\varliminf a_n + \varliminf b_n = \sup(\{ \inf A_m \mid m \in \mathbb{N} \}) + \sup(\{ \inf B_m \mid m \in \mathbb{N} \})$$

$$\underset{\text{prop}}{=} \sup(\{ \inf A_m + \inf B_m \mid m \in \mathbb{N} \})$$

$$\underset{(1)}{\leq} \sup(\{ \inf (A_m + B_m) \mid m \in \mathbb{N} \})$$

$$= \varliminf (a_n + b_n)$$

(2) まず $^\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq m \Rightarrow$

$\inf(A_m + B_m) \leqq a_n + \inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\})$ を示そう。

背理法で示す。$^\exists N \in \mathbb{N},\ (N \geqq m) \wedge$

$\inf(A_m + B_m) > a_N + \inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$ と仮定すると、

$\inf(A_m + B_m) - a_N > \inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$ より

$^\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $N_1 \geqq m$

$\inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \leqq \sup B_{N_1} < \inf(A_m + B_m) - a_N$

一方、$^\forall n \geqq m$ に対して

$\sup B_{N_1} < \inf(A_m + B_m) - a_N \leqq a_n + b_n - a_N$ であり、

$^\forall \tilde{n} \geqq N_1 \geqq m$ に対して、

$b_{\tilde{n}} \leqq \sup B_{N_1} < a_n + b_n - a_N$

$\therefore\ b_{\tilde{n}} + a_N < a_n + b_n \quad (N \geqq m,\ ^\forall n \geqq m,\ ^\forall \tilde{n} \geqq m)$

よって、$\tilde{n} = n = N \geqq m$ とすると、$b_N + a_N < a_N + b_N$ となり

矛盾。従って $^\forall n \geqq m$ に対し、

$\inf(A_m + B_m) \leqq a_n + \inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\}) \quad (^\forall m \in \mathbb{N})$

よって $\inf(A_m + B_m) \leqq \inf A_m + \inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\})$, $^\forall m \in \mathbb{N}$ で成り立つので、

$\therefore\ \sup(\{\inf(A_m + B_m) \mid m \in \mathbb{N}\}) \leqq \sup(\{\inf A_m + \inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\}) \mid m \in \mathbb{N}\})$

$\underset{\text{(Prop)}}{=} \sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) + \sup(\{\inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\}) \mid m \in \mathbb{N}\})$

ここで, $\sup(\{\inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\}) \mid m \in \mathbb{N}\})$

は $B_m^* := \inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\})$ とおくと,

B_m^* は $\sup B_p$ が p に関して単調非増加列なので,

$p=m$ で最大値を取る。従って m が減っても,

$\sup B_p$ の下限 $\inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\})$ は

変化しない。よって,

$$\inf(\{\sup B_p \mid p \geqq m\}) = \inf(\{\sup B_p \mid p \geqq 1\})$$

よって $\sup(\{\inf(\{\sup B_p \mid p \geqq 1\}) \mid m \in \mathbb{N}\})$

$= \inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$ 以上から.

p を m に表記しなおした。また, $m \geqq 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{N}$.

$$\sup(\{\inf(A_m+B_m) \mid m \in \mathbb{N}\})$$

$$\leqq \sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) + \inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$$

$$\therefore \underline{\lim}\,(a_n+b_n) \leqq \underline{\lim}\,a_n + \overline{\lim}\,b_n$$

$\underline{\lim}\,(a_n+b_n) \leqq \overline{\lim}\,a_n + \underline{\lim}\,b_n$ については,

$$\underline{\lim}\,(a_n+b_n) = \underline{\lim}\,(b_n+a_n)$$

$$\leqq \underline{\lim}\,b_n + \overline{\lim}\,a_n = \overline{\lim}\,a_n + \underline{\lim}\,b_n$$

となるので, 証明が終わる。 $\square$

(3) について，まず $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow$

$\sup(\{\inf A_p \mid p \geq m\}) + b_n \leq \sup(A_m + B_m)$ を示そう.

背理法で示す。$\exists N \in \mathbb{N},\ (N \geq m) \land$

$(\sup(\{\inf A_p \mid p \geq m\}) + b_N > \sup(A_m + B_m))$ と仮定すると，

$\sup(\{\inf A_p \mid p \geq m\}) > \sup(A_m + B_m) - b_N$

となり，$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ N_1 \geq m$, かつ

$\sup(\{\inf A_p \mid p \geq m\}) \geq \inf A_{N_1} > \sup(A_m + B_m) - b_N$

一方，$\forall n \geq m$ に対して，

$\inf A_{N_1} > \sup(A_m + B_m) - b_N \geq a_n + b_n - b_N$

$\forall \hat{n} \geq N_1 \geq m$ に対して，

$a_{\hat{n}} \geq \inf A_{N_1} > a_n + b_n - b_N \quad (\forall \hat{n} \geq m,\ \forall n \geq m,\ N \geq m)$

よって，$\hat{n} = n = N \geq m$ とすると.

$a_N + b_N > a_N + b_N$ となり，矛盾。従って，$\forall n \geq m$ に対し，

$\sup(\{\inf A_p \mid p \geq m\}) + b_n \leq \sup(A_m + B_m) \quad (\forall m \in \mathbb{N})$

よって，$\sup(\{\inf A_p \mid p \geq m\}) + \sup B_m \leq \sup(A_m + B_m)$,

ここで，$\inf A_p$ は p に関して単調非減少列なので，

$p=m$で最小値を取る。すなわち、sup は上限なので、mの値には一切依存しない。((2)も同じ理屈) 従って

$$\sup(\{\inf A_p \mid p \geq m\}) = \sup(\{\inf A_p \mid p \geq 1\})$$

これを pの表記をmに直し、$m \geq 1$ を $m \in \mathbb{N}$ に直すと、

$$\sup(\{\inf A_p \mid p \geq 1\}) = \sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\})$$

従って $\sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) + \sup B_m \leq \sup(A_m + B_m)$,

これが $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して成り立ち、かつ $\sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\})$は$m$に依存しない定数なので、両辺の inf を取ると

$$\sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) + \inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \leq \inf(\{\sup(A_m + B_m) \mid m \in \mathbb{N}\})$$

$$\therefore \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\,(a_n + b_n)$$

また、$\overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n = \underline{\lim}\, b_n + \overline{\lim}\, a_n$

$\leq \overline{\lim}\,(b_n + a_n) = \overline{\lim}\,(a_n + b_n)$ より、

もう一方も示されたことになる。

(4) について、$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq m \Rightarrow a_n + b_n \leq \sup A_m + \sup B_m$.

が成り立つ。従って $\sup(A_m + B_m) \leq \sup A_m + \sup B_m$

よって、(1)の議論と同様、

$\inf(\{\sup A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) + \inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$

$= \inf(\{\sup A_m + \sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \geq \inf(\{\sup(A_m + B_m) \mid m \in \mathbb{N}\})$

$$\therefore \overline{\lim}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$$

(5)について，prop より $\lim b_n = \underline{\lim}\, b_n = \overline{\lim}\, b_n$，(1)より

$$\underline{\lim}\,(a_n+b_n) \geq \underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n$$

$$= \underline{\lim}\, a_n + \lim b_n$$

となるが，一方，

$$\underline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\,\{(a_n+b_n) - b_n\}$$

$$\geq \underline{\lim}\,(a_n+b_n) + \underline{\lim}\,(-b_n)$$

Claim $\underline{\lim}\,(-b_n) = -\overline{\lim}\, b_n$ である.

(☺) $\sup(\{\inf(-B_m) \mid m\in\mathbb{N}\})$

$= \sup(\{-\sup B_m \mid m\in\mathbb{N}\}) \leftarrow$ (☺)

prop で示したが，$\sup A = -\inf(-A)$。

$= \sup(-\{\sup B_m \mid m\in\mathbb{N}\})$

$= -\inf(\{\sup B_m \mid m\in\mathbb{N}\}) = -\overline{\lim}\, b_n$ □

$$\therefore\ \underline{\lim}\, a_n \geq \underline{\lim}\,(a_n+b_n) - \overline{\lim}\, b_n$$

$$= \underline{\lim}\,(a_n+b_n) - \lim b_n$$

$\therefore\ \underline{\lim}\, a_n + \lim b_n \geq \underline{\lim}\,(a_n+b_n)$，となり.

2つが成立するのは等号の時のみなので，

$$\underline{\lim}\,(a_n+b_n) = \underline{\lim}\, a_n + \lim b_n$$

(6) について, (4) より,

$$\overline{\lim}\,(a_n+b_n) \leqq \overline{\lim}\,a_n + \overline{\lim}\,b_n$$
$$= \overline{\lim}\,a_n + \lim b_n$$

となるが, 一方,

$$\overline{\lim}\,a_n = \overline{\lim}\,\{(a_n+b_n) - b_n\}$$
$$\leqq \overline{\lim}\,(a_n+b_n) + \overline{\lim}\,(-b_n)$$

<u>Claim</u> $\overline{\lim}\,(-b_n) = -\underline{\lim}\,b_n$ である.

(∵) $$\inf(\{\sup(-B_m) \mid m \in \mathbb{N}\})$$
$$= \inf(\{-\inf B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$$
$$= \inf(-\{\inf B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$$
$$= -\sup(\{\inf B_m \mid m \in \mathbb{N}\}) = -\underline{\lim}\,b_n \quad \square$$

$$\therefore\ \overline{\lim}\,a_n \leqq \overline{\lim}\,(a_n+b_n) + \overline{\lim}\,(-b_n)$$
$$= \overline{\lim}\,(a_n+b_n) - \underline{\lim}\,b_n$$
$$= \overline{\lim}\,(a_n+b_n) - \lim b_n$$

$$\therefore\ \overline{\lim}\,a_n + \lim b_n \leqq \overline{\lim}\,(a_n+b_n)$$

よって, 2つの組み合わせにより

$$\overline{\lim}\,(a_n+b_n) = \overline{\lim}\,a_n + \lim b_n \quad \square$$

$\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$ は、定数倍を外に出したり、積を割ることが出来る。

<u>Prop</u> $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $a_n \geqq 0$, $b_n \geqq 0$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$)

が成り立つとき、次が成立する。

$$\overline{\lim}\,(a_n b_n) \leqq \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n$$

$$\underline{\lim}\,(a_n b_n) \geqq \underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n$$

(∵) $A_m := \{a_n \mid n \geqq m\}$, $B_m := \{b_n \mid n \geqq m\}$

$A_m B_m := \{a_n \cdot b_n \mid n \geqq m\}$ とおく。

$^\forall n \geqq m$ に対して、$a_n \geqq 0$, $b_n \geqq 0$ より、

$$a_n \cdot b_n \leqq \sup A_m \cdot \sup B_m$$

$$\therefore \sup A_m B_m \leqq \sup A_m \cdot \sup B_m \quad (^\forall m \in \mathbb{N})$$

よって $\inf(\{\sup A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \cdot \inf(\{\sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$

$= \inf(\{\sup A_m \cdot \sup B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$

↑
propより

$\geqq \inf(\{\sup A_m B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$ となり、

$\overline{\lim}\,(a_n b_n) \leqq \overline{\lim}\, a_n \cdot \overline{\lim}\, b_n$ が言えたことになる。

$\forall n \geq m$ に対して, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ より

$$\inf A_m \cdot \inf B_m \leq a_n \cdot b_n$$

$$\therefore \inf A_m \cdot \inf B_m \leq \inf A_m B_m \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

よって, $\sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \cdot \sup(\{\inf B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$

$$\underset{\text{prop}}{=} \sup(\{\inf A_m \cdot \inf B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$$

$$\leq \sup(\{\inf A_m \cdot B_m \mid m \in \mathbb{N}\})$$ となり,

$\underline{\lim}\,(a_n b_n) \geq \underline{\lim}\, a_n \cdot \underline{\lim}\, b_n$ が言えたことになる。□

prop $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ に対して,

$c > 0$ のとき,

$$\overline{\lim}\,(c a_n) = c\, \overline{\lim}\, a_n \quad (1)$$

$$\underline{\lim}\,(c a_n) = c\, \underline{\lim}\, a_n \quad (2)$$

$c < 0$ のとき,

$$\overline{\lim}\,(c a_n) = c\, \underline{\lim}\, a_n \quad (3)$$

$$\underline{\lim}\,(c a_n) = c\, \overline{\lim}\, a_n \quad (4)$$

($\because$) 初めに, 準備として, 次の主張を用意しよう。

(本当は前の節でやっておくべき命題だが…)

Claim $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ に対して.

$c>0$ のとき, $\sup(cA) = c\sup A$ (1)

$\inf(cA) = c\inf A$ (2)

$c<0$ のとき, $\sup(cA) = c\inf A$ (3)

$\inf(cA) = c\sup A$ (4)

ここで, $cA := \{ca \mid a \in A\}$ を表す.

(∵) (1) から示す. $c>0$ を仮定する.

$\sup(cA) > c\sup A$ と仮定すると,

${}^{\exists}\alpha \in cA$ s.t. $\sup(cA) \geq \alpha > c\sup A$ となるが.

${}^{\forall}a \in A$ に対して. $c\sup A \geq ca$ となり. $\alpha \in cA$ に矛盾。

$\sup(cA) < c\sup A$ と仮定すると.

$\frac{1}{c}\sup(cA) < \sup A$ より. ${}^{\exists}a \in A$ s.t.

$\frac{1}{c}\sup(cA) < a \leq \sup A$

∴ $\sup(cA) < ca \leq c\sup A$ となるが,

${}^{\forall}\alpha \in \sup(cA)$ に対して. $\alpha \leq \sup(cA)$ より

$\alpha \leq \sup(cA) < ca \leq c\sup A$ となり. $ca \in cA$ に矛盾。

よって, $\sup(cA) = c\sup A$

(2) を示す。 $\inf(cA) > c\inf A$ と仮定すると、

$\inf A < \frac{1}{c}\inf(cA)$。 すなわち、

$\exists a \in A$ s.t. $\inf A \leq a < \frac{1}{c}\inf(cA)$

$\therefore \quad c\inf A \leq ca < \inf(cA)$

一方、$\forall \alpha \in cA$, $\inf(cA) \leq \alpha$ より

$ca < \inf(cA) \leq \alpha$ となり、 $ca \in cA$ に矛盾。

$\inf(cA) < c\inf A$ と仮定すると、

$\exists \alpha \in cA$ s.t. $\inf(cA) \leq \alpha < c\inf A$

一方、$\forall a \in A$ $\inf A \leq a$ より

$\alpha < c\inf A \leq ca$ となるが $\alpha \in cA$ に矛盾。

よって $\inf(cA) = c\inf A$

(3) を示す。 $\sup(cA) \Leftrightarrow \forall u \in U(cA)$, $\sup(cA) \leq u$

であるから、 $-u \leq -\sup(cA)$. $(\forall u \in U(cA))$

一方、$L(-cA) = \{-u \in \mathbb{R} \mid u \in U(cA)\}$ なので、

$\forall u \in U(cA)$, $-u \leq -\sup(cA) \Leftrightarrow -\sup(cA) = \inf(-cA)$

$\therefore \quad \sup(cA) = -\inf(-cA)$ が $\forall c \in \mathbb{R}$ に対して

成り立つ。 $c<0$ より、 $-c>0$ なので

$$\sup(cA) = -\inf(-cA) = -(-c)\inf A$$
$$= c\inf A$$

となり、 (3) が示された。

(4) を示す。 $\inf(cA) \Leftrightarrow {}^\forall l \in L(cA),\ l \leq \inf(cA)$

であるから、 $-\inf(cA) \leq -l \quad ({}^\forall l \in L(cA))$

一方、$U(-cA) = \{-l \in \mathbb{R} \mid l \in L(cA)\}$ なので、

${}^\forall l \in L(cA),\ -\inf(cA) \leq -l \Leftrightarrow -\inf(cA) = \sup(-cA)$

$\therefore\ \inf(cA) = -\sup(-cA)$ が ${}^\forall c \in \mathbb{R}$ に対して

成り立つ。 $c<0$ より、 $-c>0$ なので、

$$\inf(cA) = -\sup(-cA) = -(-c)\sup A = c\sup A$$

となり、(4) が示された。 $\square$

<u>prop</u> の証明に戻ろう。

(1) を示す。 $c>0$ と仮定する。

$$\begin{aligned}\overline{\lim}(ca_n) &= \inf(\{\sup cA_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \\ &= \inf(c\{\sup A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \quad (\because \text{Claim } (1)) \\ &= c\inf(\{\sup A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \quad (\because \text{Claim } (2)) \\ &= c\,\overline{\lim}\, a_n\end{aligned}$$

(2) を示す。

$$\begin{aligned}\underline{\lim}(ca_n) &= \sup(\{\inf cA_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup(c\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \quad (\because (2)) \\ &= c\sup(\{\inf A_m \mid m \in \mathbb{N}\}) \quad (\because (1)) \\ &= c\,\underline{\lim}\, a_n\end{aligned}$$

(3) を示す。　$c<0$ と仮定する。

$$\overline{\lim}\,(ca_n) = \inf(\{\sup cA_m \mid m\in\mathbb{N}\})$$
$$= \inf(c\{\inf A_m \mid m\in\mathbb{N}\}) \quad (\because (3))$$
$$= c\sup(\{\inf A_m \mid m\in\mathbb{N}\}) \quad (\because (4))$$
$$= c\,\underline{\lim}\,a_n$$

(4) を示す。

$$\underline{\lim}\,(ca_n) = \sup(\{\inf cA_m \mid m\in\mathbb{N}\})$$
$$= \sup(c\{\sup A_m \mid m\in\mathbb{N}\})$$
$$= c\inf(\{\sup A_m \mid m\in\mathbb{N}\})$$
$$= c\,\overline{\lim}\,a_n \qquad \square$$

ここまでの証明が一通り追えれば、かなり実数や実数列の扱いに親しんだものと思われる。焦らず、ゆっくり理解すれば良い。

☆ §1, §2に関連する問題

講義では、

○ $\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$

○ $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ としたとき

$$a_n \to e, \quad b_n \to e \quad (n \to \infty)$$

○ $a_n \to a \ (n \to \infty)$ のとき、

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \to a \quad (n \to \infty)$$ を証明した。

更に、レポート問題の解答では、

○ $|a| < 1$ のとき、 $a^n \to 0 \quad (n \to \infty)$

を証明しておるので、参考にして欲しい。

補足P.8では、極限値の四則を扱っている。これも、よく使われる手法の基礎が盛り込まれているので、一度は見て欲しい。すなわち、$a_n \to a$, $b_n \to b \quad (n \to \infty)$ のとき

$$k a_n \to k a, \quad a_n + b_n \to a+b,$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b, \quad a_n / b_n \to a/b \quad (b \neq 0).$$

その他、特に紹介は出来なかったが、重要と思われる例題を解説する。

(ex) $x>1$ とする。 $a_n := \dfrac{n}{x^n}$ の極限を求めよ。

(Ans) $a_n \to 0 \ (n\to\infty)$ である.

(∵) $\delta := x-1>0$ とおくと, $n \geqq 3$ とすれば;

$$x^n = (1+\delta)^n = 1+n\cdot\delta+\frac{1}{2!}n(n-1)\cdot\delta^2+\cdots$$

$$\geqq \frac{1}{2}n(n-1)\cdot\delta^2$$

$$\therefore \frac{1}{\frac{1}{2}n(n-1)\delta^2} \geqq \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow \frac{2}{(n-1)\delta^2} \geqq \frac{n}{x^n}$$

$\dfrac{n}{x^n} \geqq 0$ より $0 \leqq \dfrac{n}{x^n} \leqq \dfrac{2}{(n-1)\cdot\delta^2}$

$0\to 0 \ (n\to\infty)$, $\dfrac{2}{(n-1)\delta^2} \to 0 \ (n\to\infty)$ より

はさみうちの原理から, $\dfrac{n}{x^n} \to 0 \ (n\to\infty)$ □

(注) 二項定理は, 不等式評価を作るときにかなり使うので, 頭の片隅においておくことをおすすめする. 特に, 自然数乗と多項式との評価では威力を発揮する.

(ex) $a, b, c > 0$ を定数とする。

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$ を求めよ。

(Ans) $k := \max\{a, b, c\} > 0$ とおく。このとき

$$k = \sqrt[n]{k^n} \leqq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

$$\leqq \sqrt[n]{3 \cdot k^n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{k^n}$$

$$= \sqrt[n]{3} \cdot k$$

Claim $\forall c \in \mathbb{R}$, $c > 0$: 定数とする。

$\sqrt[n]{c} \to 1 \quad (n \to \infty)$ である。

(☺) $c > 1$ のとき、$\sqrt[n]{c} - 1 > 0$ より、$a_n := \sqrt[n]{c} - 1 > 0$ とおくと

$$c = (1 + a_n)^n = 1 + n \cdot a_n + \frac{1}{2} n(n-1) a_n^2 + \cdots > n a_n$$

$\therefore c/n > a_n > 0$ より、はさみうちの原理から、$a_n \to 0 \ (n \to \infty)$

$c = 1$ のときは、$\sqrt[n]{c} = 1$ より、成り立つ。

$0 < c < 1$ のとき、$1/c > 1$ より

$$\sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}} \to \frac{1}{1} = 1 \quad (n \to \infty)$$ (☺)(極限の四則)

従って、$c > 0$ で $\sqrt[n]{c} \to 1 \ (n \to \infty)$ □

よって、上の Claim から、$k \to k \ (n \to \infty)$, $\sqrt[n]{3} \cdot k \to k \ (n \to \infty)$

より、はさみうちの原理より、$\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \to k = \max\{a, b, c\}$ //

(ex) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $a_n > 0$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) とする.

$a_n \to a$ $(n\to\infty)$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = a$$ を示せ。

(◎) $a > 0$ のとき, 仮定より $^\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $a > \varepsilon > 0$ に対して,

$$^\exists N \in \mathbb{N},\ ^\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

よって,
$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_N \underbrace{\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdots\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{n-N\text{コ}}}$$

$$< \sqrt[n]{a_1 \cdots a_N \cdot a_{N+1} \cdots a_n}$$

$$< \sqrt[n]{a_1 \cdots a_N \cdot \underbrace{\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdots\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{n-N\text{コ}}}$$ が成り立ち.

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_N} \cdot \left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-N}{n}} < \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < \sqrt[n]{a_1 \cdots a_N} \cdot \left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-N}{n}}$$

$\sqrt[n]{c} \to 1$, $(n\to\infty)$ $\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}} = \dfrac{(a-\varepsilon)}{((a-\varepsilon)^N)^{\frac{1}{n}}} \to a - \frac{\varepsilon}{2}$ $(n\to\infty)$

$$\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}} = \frac{(a+\varepsilon)}{((a+\varepsilon)^N)^{\frac{1}{n}}} \to a - \frac{\varepsilon}{2} \quad (n\to\infty)$$

から. n を十分大きく取ると

$$a - \varepsilon < \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} < a + \varepsilon \quad \therefore \left|\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} - a\right| < \varepsilon$$

$a=0$ のときは, $^\forall\varepsilon>0$ に対して

$^\exists N\in\mathbb{N},\ ^\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqq N \Rightarrow a_n<\frac{\varepsilon}{2}$

よって, $0<\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$

$$<\sqrt[n]{a_1\cdots a_N\cdot\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{\varepsilon}{2}}_{n-N\text{コ}}}$$

$$=\sqrt[n]{a_1\cdots a_N}\circ\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}$$

nを十分大きく取ると

$$<(1+\varepsilon)\circ\frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}<\varepsilon \text{ より}.$$

$$\left|\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right|<\varepsilon \qquad \square$$

(ex) $^\forall x\in\mathbb{R},\ x>0$ に対して $\inf_{p,q\in\mathbb{N}}|px-q|=0$ が成り立つ.

(∵) $^\forall x\in\mathbb{R}$ に対し, Gauss記号 $[x] \Leftrightarrow x-1<[x]\leqq x$,

$[x]\in\mathbb{Z}$ とする。 $a_n:=nx-[nx]$ を考えると,

$0\leqq nx-[nx]<1$ より, a_nは有界列. 従って,

Bolzano-Weierstrass の定理より, $^\exists\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$a_{n_j}\to a\ (j\to\infty)$. 収束列はCauchy列なので,

$^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists J\in\mathbb{N},\ ^\forall j>k\geqq J\Rightarrow|a_{n_j}-a_{n_k}|<\varepsilon$

従って $0 \leq |a_{n_j} - a_{n_k}| < \varepsilon$

$\therefore 0 \leq |n_j x - [n_j x] - (n_k x - [n_k x])| < \varepsilon$

$\therefore 0 \leq |(n_j - n_k)x - ([n_j x] - [n_k x])| < \varepsilon$

ここで、 $n_j > n_k$, $x > 0$ より $n_j x > n_k x$

$\therefore [n_j x] > [n_k x]$, $(j \gg k)$
十分大きい

よって $n_j - n_k > 0$, $[n_j x] - [n_k x] > 0$ より

$$\inf_{p, q \in \mathbb{N}} |px - q| = 0 \qquad \square$$

(注) このことは、任意の正の実数が、正の有理数で近似できることを表している。有理数の稠密性とも言う。
(ちゅうみつ or ちょうみつ)

(R17) と同値の Bolzano - Weierstrass の定理を使っていることに注意しよう。$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ で稠密という事実は、ここから導かれる。

§3 関数の極限と連続性

関数の極限については、数理応用や講義で重要な部分は終わっているので、ここでは多少補足をして行く。

Def $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ を満たす開区間とする。

$f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ とする。($I \setminus \{x_0\} := \{x \in I \mid x \neq x_0\}$).

f が I 上で continuable function であるとは、

$f(x) \to A \quad (x \to x_0)$ を満たす $A \in \mathbb{R}$ を用いて、

$f(x_0) = A$ と定義すれば、f は I 上全体で連続になる

関数のことを言う。

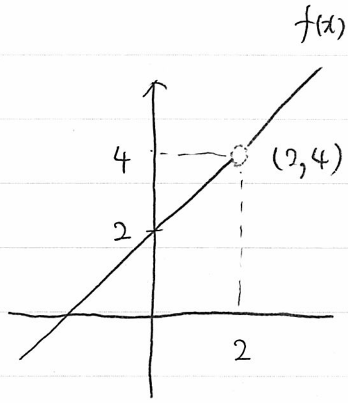
(注) 生徒さんに質問されて、ぼんやりどこかで見た覚えがあるな…と思い、Google 先生に聞いたところ、(確認のため)
Gilbert Strang (著) の CALCULUS の第1巻に全く同じ問題 (番号まで同じ) が載っていたので、先端の出典はこれだと思われる。が、正直あまり一般的な用語なのか怪しい。(というか、殆んど見たことない…。)

定義から $f : I$ 上連続 (continuous) $\to$ I 上 continuable である。邦訳は 連続化可能(?) とかだと思う。(力不足でスミマセン。)

(ex) continuable function について、いくつか重要な例を挙げる。

(このような議論自体は、良く行われる。)

(1) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ $(x \neq 2)$



この関数 f は、$x \neq 2$ 上で、

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \text{ となり、}$$

右のグラフのようになる。$x=2$ が未定義だが、

$f(x) \to 4$ $(x \to 2)$ である。

(☺) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$ とする。$\forall x \in \mathbb{R}$ に対し

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = \left| \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4 \right|$$

$$= |(x+2)-4| = |x-2| < \delta = \varepsilon \text{ となり}$$

$f(x) \to 4$ $(x \to 2)$ であることが示された。

そこで、$f(2)=4$ と一点を新たに定義することにすると、

$f(x) = x+2$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ となる。ここで、

$f(x) = x+2$ は $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ で連続である。

(☺) $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して、$\forall \varepsilon > 0$, 取る。$\exists \delta = \varepsilon > 0$ とすると、

$$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |(x+2)-(x_0+2)| = |x-x_0|$$
$$< \delta = \varepsilon, \text{ となり、} f(x) \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上連続。} \square$$

以上の議論から，$f(2)=4$ と一点定義し直したことにより，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上全体で連続な関数へ拡張されたので，$f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$ は continuable function である。

（注） continuable function がこの意味で使われている本がそんなたくさんあるとも思えないので(※1)，定義を拡張していいのか微妙(?)だが，おそらく次のことも continuable function と言えると思う。（※1：私の勉強不足かもしれない。）

$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}\subset I\subset\mathbb{R}$ とする。

$f: I\setminus\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}\to\mathbb{R}$ が continuable function

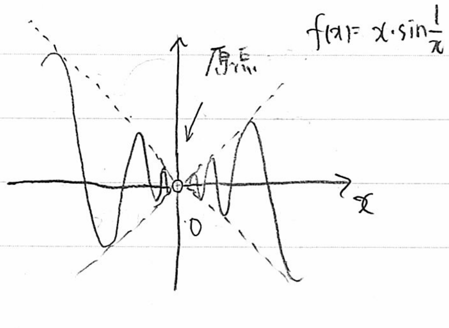
$\Longleftrightarrow$ $^\forall k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ に対して，

$f(x)\to A_k\ (x\to x_k)$ が成立する $A_k\in\mathbb{R}$ が存在するとき，$f(x_k)=A_k$ と定義すれば，

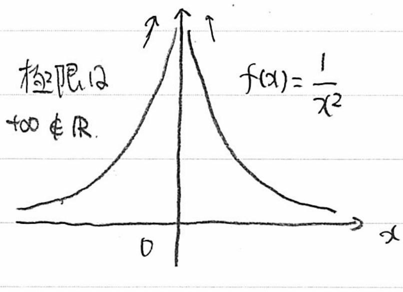
f が I 上連続になる。

つまり，$A_k\in\mathbb{R}$ なので，下の図のような図の関数が continuable function なのだと思う。

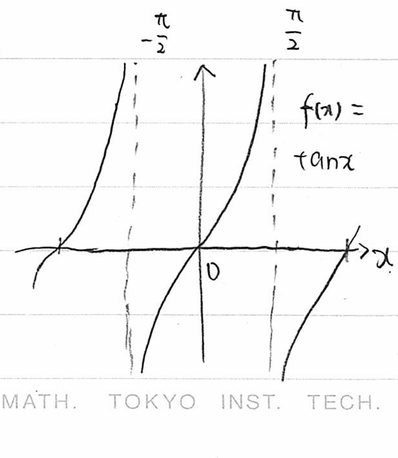
(continuable function)



(NOT continuable function)



(NOT continuable func.)



(ex) $f(x) : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \mapsto & \sin\frac{1}{x} \end{array}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しないことを示せ。

(☺) $f(x) \to A \ (x \to x_0)$

$\underset{\text{(Thm)}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x \to x_0 \ (n\to\infty)$, $(x_n \neq x_0)$ に対し,

$$f(x_n) \to A \quad (n\to\infty)$$

を用いて証明しよう。

$\lim_{x\to 0} f(x)$ が存在しないとは, 上の命題を否定すれば良い。

すなわち, ${}^{\exists}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x \to x_0 \ (n\to\infty)$, $(x_n \neq x_0)$,

$f(x_n)$ が発散 ($\Leftrightarrow f(x)$ が収束しない)

つまり, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が発散するような数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を (1つでも) 持ってきてしまえば良い。例えば,

$$x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$$ とおくと,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0$$ となるが,

$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right) = (-1)^n$ となり, $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は発散。

従って, $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在しない。 □

<u>prop</u>　f, g は区間 $I \subset \mathbb{R}$ で連続とする。

このとき、次の関数が I 上連続になる。

(i) $-f(x)$, (ii) $f(x) \pm g(x)$, (iii) $f(x)g(x)$, (iv) $\dfrac{1}{f(x)}$

(v) $|f(x)|$, (vi) $\max\{f(x), g(x)\}$, (vii) $\min\{f(x), g(x)\}$

(∵) (i) $-f(x)$ が連続を示す。

念のため、
$$\left(\begin{array}{l} f(x) \text{ が } I \text{ 上連続} \\ \Leftrightarrow \quad x_0 \in I \text{ に対し、} {}^\forall\varepsilon>0, {}^\exists\delta>0, {}^\forall x \in \mathbb{R}, \\ \qquad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \end{array}\right)$$
である。

仮定より ${}^\forall\varepsilon>0$, ${}^\exists\delta>0$, ${}^\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

ここで、$|(-f(x))-(-f(x_0))| = |-(f(x)-f(x_0))|$

$= |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ より

関数 $-f(x)$ も I 上連続。

(ii) $f(x)+g(x)$ が連続であることを示す。

${}^\forall\varepsilon>0$ を取り、固定する。このとき、

仮定より、${}^\exists\delta_1>0$, ${}^\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$^{\exists}\delta_2 > 0,\ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},$$

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

である。$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと,

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta_1$ かつ $|x - x_0| < \delta_2$ なので,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},\quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。従って

$$|(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))|$$

$$= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_{//}$$

となり, $f(x) + g(x)$ も I 上連続。

$f(x) - g(x)$ が I 上連続であることは, 次のようにして分かる.

$g(x)$ が連続なので, (i) より, $-g(x)$ も連続。

従って, $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$ より, (ii) から

$f(x) - g(x)$ も連続である。

(iii) $f(x)g(x)$ について示す。

$K - |f(x_0)| > 0$ を満たす $K \in \mathbb{R}$ に対し

$^{\exists}\delta_1 > 0$, ${}^{\forall}x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < K - |f(x_0)|$

このとき, $|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)|$

$$\leqq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)|$$

$$< K - |f(x_0)| + |f(x_0)| = K.$$

より, $|f(x)| < K \cdots (1)$, を満たす。

更に, $^\forall \varepsilon > 0$ に対し, $^\exists \delta_2 > 0$, $^\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+1)}, \cdots (2)$$

$^\exists \delta_3 > 0$, $^\forall x \in \mathbb{R}$.

$$|x - x_0| < \delta_3 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot (3)$$ である.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおくと, $|x - x_0| < \delta$ に対し,

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)|$$

$$= |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)|$$

$$= |f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0))|$$

$$\leqq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)|$$

(1), (2), (3) より

$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |g(x_0)| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|g(x_0)|}{|g(x_0)|+1}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

よって、$f(x)\cdot g(x)$ は I 上連続である。

(iv) $\dfrac{1}{f(x)}$ が I 上連続であることを示す。

((注) このことにより、$\dfrac{1}{f(x)}\cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ も (iii) から連続.)

$|f(x_0)| > 0$ より、仮定から $^\exists \delta_1 > 0,\ ^\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2}$$

このとき、
$$|f(x)| = |f(x_0) - (f(x_0) - f(x))|$$
$$\geqq \big||f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)|\big|$$
$$> \left||f(x_0)| - \frac{|f(x_0)|}{2}\right| = \frac{|f(x_0)|}{2}$$
となる。

一方、$^\forall \varepsilon > 0$ に対し、$^\exists \delta_2 > 0,\ ^\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < |f(x_0)|^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおく。$|x - x_0| < \delta$ に対し

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \left|\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)f(x_0)}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x)||f(x_0)|}$$
$$< \frac{\frac{1}{2}\cdot|f(x_0)|^2\varepsilon}{\frac{1}{2}|f(x_0)|^2} = \varepsilon$$
となるので、

$\dfrac{1}{f(x)}$ は連続である。

(v) $|f(x)|$ について示す。

$^{\forall}\varepsilon>0,\ ^{\exists}\delta>0,\ ^{\forall}x\in\mathbb{R},\quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

である。一方、三角不等式より、

$||f(x)|-|f(x_0)|| \leqq |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ となるので、

$|f(x)|$ も連続。(この三角不等式について詳しくはレポートの解答を参考にせよ。)

(vi) $\max\{f(x), g(x)\}$ について示す。

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

となるので、(i), (ii) より、$f(x)-g(x)$ が連続、

(v) より、$|f(x)-g(x)|$ が連続、

(ii) を2回用いて、$f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|$ も連続。

最後に、(iv) より

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$ も連続である。

(注) $^{\forall}x_0\in I$ を取り、(i) $f(x_0)>g(x_0)$、(ii) $f(x_0)=g(x_0)$、(iii) $f(x_0)<g(x_0)$ と3つの場合分けをして示すことも当然できるが、各自に任せる。(ヒント (i) のとき、$\alpha := f(x_0)-g(x_0)>0$ に対し、$^{\exists}\delta_1>0,\ ^{\forall}x\in\mathbb{R}$, $|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-g(x)-\alpha|<\frac{\alpha}{2}$ から、$|x-x_0|<\delta_1$ 上、$f(x)>g(x)$ を出す。)

(vii) $\min\{f(x), g(x)\}$ について示す

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

となるので，(v)と同様に $f(x)-g(x)$, $f(x)+g(x)$: 連続

$\Rightarrow |f(x)-g(x)|$, $f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|$: 連続

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$ も連続。□

(ex)

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}) \\ -x & (x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : 無理数) \end{cases}$$

は，$x=0$ で連続で，それ以外の箇所では不連続。

(∵) $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists \delta = \varepsilon > 0$, $^\forall x \in \mathbb{R}$

$|x-0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)|$

$= |f(x) - 0| \leqq |x| < \delta = \varepsilon$ となり

$f(x)$ は $x=0$ で連続。

次に，$x_0 \neq 0$ と仮定する。

先に進む前に，有理数，無理数の稠密性に触れておこう。

Claim (有理数と無理数の稠密性)

$a<b$ を満たす任意の2つの実数 a, b に対し

(1) $\exists x \in \mathbb{Q}$ s.t. $a<x<b$

(2) $\exists y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ s.t. $a<y<b$
(無理数全体)

(∵) Archimedes' principle により

$\frac{1}{b-a} < n$ を満たす最小の $n \in \mathbb{N}$ が存在する。

従って、$1 < nb - na$ となる。再び Archimedes' principle により $\exists M \in \mathbb{N}$. $|na| < M$ となる。ここで集合 P を

$P := \{ m \in \mathbb{Z} \mid -M \leq m \leq M \}$ によって定義する。

このとき、$\exists m \in P$ s.t. $na < m$ となるので

$m-1 \leqq na < m$。すると、

$na < m = (m-1)+1 \leqq na+1 < na+(nb-na) = nb$

$\therefore \quad na < m < nb$

よって、$a < \frac{m}{n} < b$ (∵ $n \in \mathbb{N}$)

$x = \frac{m}{n}$ とおけば、$a<x<b$, $x \in \mathbb{Q}$ //

(2) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を任意に1つ選び，固定する．

$\hat{a} = a - \alpha$, $\hat{b} = b - \alpha$ とおくと，$\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$,

$\hat{a} < \hat{b}$ より，(1)より，${}^{\exists}x \in \mathbb{Q}$ s.t. $\hat{a} < x < \hat{b}$

となる。今，$\hat{a}, \hat{b}$ の定義より

$$a - \alpha < x < b - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha < x + \alpha < b \text{ となる.}$$

$x \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ より．$x + \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ である．

(∵) $x + \alpha \in \mathbb{Q}$ とすると，$x + \alpha =: \beta \in \mathbb{Q}$ とおけば，

$\beta - x \in \mathbb{Q}$ となるが，$\beta - x = (x + \alpha) - x = \alpha \notin \mathbb{Q}$ に

矛盾する。従って $x + \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

従って $y = x + \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とおけば，

$a < y < b$ となる無理数 y の存在が言えた。

問題に戻ると，

$x_0 \in \mathbb{Q}$ のとき，$f(x_0) = x_0$ であり，${}^{\exists}\varepsilon_0 = |x_0| > 0$ とする。

$|x_0| > {}^{\forall}\delta > 0$ に対して，${}^{\exists}x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，$|x - x_0| < \delta$ とできる

((∵) $-\delta + x_0 < x < \delta + x_0$ より．claim (2) を用いる．□)

従って $|x - x_0| < \delta < |x_0|$ であり，

$$|f(x)-f(x_0)| = |-x-x_0| = |x+x_0|$$

$$|x-x_0+2x_0| \geqq \big|2|x_0|-|x-x_0|\big|,$$

$$\geqq \big|2|x_0|-\delta\big| > \big|2|x_0|-|x_0|\big|$$

$$= |x_0| = \varepsilon_0.$$

となり、$x_0 \in \mathbb{Q}$, $x_0 \neq 0$ のとき、不連続。

また、$x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ のとき、$f(x_0) = -x_0$ であり

$\exists \varepsilon_0 = |x_0| > 0$ とする。$|x_0| > {}^\forall \delta > 0$ に対して、

${}^\exists x \in \mathbb{Q}$, $|x-x_0| < \delta$ とできる。

(($\because$) $x_0-\delta < x < x_0+\delta$ より Claim (1) を用いる。□)

従って $|x-x_0| < \delta < |x_0|$ であり

$$|f(x)-f(x_0)| = |x-(-x_0)| = |x+x_0|$$

$$|x-x_0+2x_0| \geqq \big|2|x_0|-|x-x_0|\big|$$

$$\geqq \big|2|x_0|-\delta\big| > \big|2|x_0|-|x_0|\big|$$

$$= |x_0| = \varepsilon_0.$$

となり、$x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ のとき、不連続。

よって、$x=0$ でのみ連続である。

(ex) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ を，次のように定める。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \left(x \in \mathbb{Q} \text{ で，既約分数で表したとき，} x = \dfrac{p}{q}\right) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \end{cases}$$

このとき，$a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ である。

また，f は $x \in \mathbb{Q}$ のとき不連続，$x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ のとき連続。

(∵) ${}^\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ を取り，固定する。

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ から示す。i.e.,

${}^\forall \varepsilon > 0$, ${}^\exists \delta > 0$, s.t.

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$.

${}^\forall q_0 \in \mathbb{N}$ を取る。$[a-1, a+1]$ に，分母が q_0 以下となる有理数は有限個（高々 $q_0^2 + 2q_0$ 個）となる。

(∵) $q_0 \geqq 1$ と仮定する。$[a-1, a+1]$ に，

分母が 1 となる有理数は，高々 3 個

分母が 2 となる有理数は，高々 5 個

分母が 3 となる有理数は，高々 7 個

⋮

分母が q_0 となる有理数は，高々 $(2q_0+1)$ 個 である。

(注) 高々○○個とは、「多くても○○個以下である」という意味の、数学用語である。

従って、分母が q_0 以下となる有理数は、高々

$$\sum_{k=1}^{q_0}(2k+1) = 2\cdot\frac{1}{2}q_0(q_0+1)+q_0$$

$$= q_0^2+2q_0 \text{ 個}$$ となる。

よって、この全体を $Q_{q_0} \subset [a+1, a-1]$ とすると、

Q_{q_0} は有限集合なので、$\exists \dfrac{p^*}{q^*} \in Q_{q_0}$,

$\dfrac{p^*}{q^*} - a = \min\left(Q_{q_0} - \{a\}\right) > 0$。$\delta := \dfrac{p^*}{q^*} - a > 0$

とおくと、$(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$ の中には、

$f(x) \geqq \dfrac{1}{q_0}$ となる $x \in \mathbb{Q}$ が1つも存在しない。

すなわち、$\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\} \Rightarrow f(x) < \dfrac{1}{q_0}$

((注) $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 0 < \dfrac{1}{q_0}$)

よって、$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-0| = |f(x)| < \dfrac{1}{q_0}$,

今、ε に対して、q_0 は任意なので、$\dfrac{1}{q_0} < \varepsilon$ となるように取れるので、$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{1}{q_0} < \varepsilon$ □

続いて $f(x)$ の連続性について示す

$a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (既約分数) のとき, $^\forall \delta > 0$ に対して,

無理数の稠密性により, $a - \delta < x < a + \delta$ を満たす

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が存在する。

従って $^\exists \varepsilon_0 := \left|\dfrac{1}{q}\right| > 0$ とおくと, $^\forall \delta > 0$ に対して, $^\exists x \in \mathbb{R}$.

$$(|x - a| < \delta) \wedge \left(|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{q}\right| \geq \varepsilon_0 \right)$$

となり, $a = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ では不連続。

$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき, 前述の議論から,

$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = 0$; 今, $f(a) = 0$ なので,

$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であるから, f は $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき, 連続。

(ε-δ ばかりやると, 高校までの記号を使うのが一瞬ためらわれる

かもしれないが, 上の主張は正しい。)

この例の $f(x)$ を Riemann 関数といい, 実は Riemann 積分可能

であることが知られている。(グラフを想像するのはむズかシんが…。)

Riemann 関数は, ある点を中心に拡大すれば大体 0 に近い関数である。

連続関数は,引き伸ばせば大体定数になっている

ことを表す命題を証明しよう.

Prop　$I \subset \mathbb{R}$; 開区間, $f: I \to \mathbb{R}$, 連続とする.

ある1点 $a \in I$ で $f(a) > 0$ であれば, $^{\exists} c > 0$.

$^{\exists}\delta^* > 0$ s.t. $^{\forall}x \in (a-\delta^*, a+\delta^*) \Rightarrow f(x) > c$

(∵) f は $x=a$ で連続なので, $\varepsilon := \dfrac{f(a)}{2} > 0$ とおくと,

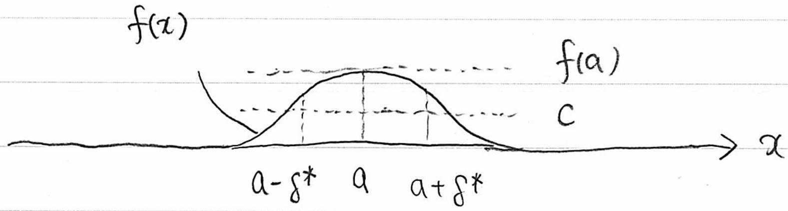
$^{\exists}\delta^* > 0$, $^{\forall}x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \delta^* \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ここで, $-\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon$

∴ $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$

∴ $0 < \dfrac{f(a)}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2} f(a)$ より $c = \dfrac{f(a)}{2} > 0$

とおくと, $|x-a| < \delta^* \Leftrightarrow {}^{\forall}x \in (a-\delta^*, a+\delta^*) \Rightarrow f(x) > c$ □



(注) 「大体定数」というだけで,「⋀」とか「⌒」のように,

常に振動していることは考えられる. (ex; $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ の $x=0$ 近く)

より定数に近い連続性のことを,「一様連続性」という

この，極限と定数というのが成立つ例である。

<u>Prop</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は周期的（ある $t > 0$ が存在し，

$^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x+t) = f(x)$ が成立）であり，

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ が存在するとする。このとき，$f \equiv c$（c：定数）

(∵) f が定数でないと仮定すると，$^\exists x_0 \in \mathbb{R}$，$0 \leq x_0 < t$ s.t.

$f(x_0) \neq c$ （$f(x_0) > c$ と仮定しても一般性を失わない。）

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ が存在しているので，極限を

$^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists K > 0$. $^\forall x \in \mathbb{R}$, $x > K \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$。

f が周期的なので，$f(x_0 + t) = f(x_0)$ となる。

ここで，数列 $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ を，

$x_k := x_{k-1} + t$, （$^\forall k \in \mathbb{N}$）とおくと，

$f(x_k) = f(x_0)$。$t > 0$ より，

Archimedes' principle から，$^\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $K < tn$.

よって，$f(x_n) = f(x_0)$，$x_n > K$ となるが，

$\varepsilon = (f(x) - c)/2 > 0$ とすると，$|f(x_0) - c| \geq \varepsilon$ となり，矛盾。

よって，f は定数関数である。

◦ 一様連続性

関数の連続性というのは局所的な情報で、全体をあまり詳しくは見ていなかったが、関数全体の性質が良く分かる連続性を考えたい。

Def (一様連続)

f を区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上定義された関数とする。

$$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta > 0,\ ^\forall x \in I,\ ^\forall y \in I$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

を満たすとき、f は I 上一様連続であるという。

今までの連続性との違いを良く見るために、今までのも下に書くと、

Def (I 上で連続)

$$^\forall x_0 \in I,\ ^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta > 0,\ ^\forall x \in I$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

を満たすとき、f は I 上連続であるという。

通常の連続性は I 上の点 x_0 1点を固定し、その周辺について議論していただけだが、一様連続は I 上の任意の点の周辺について議論していることに注意しよう。

(一様連続な関数)

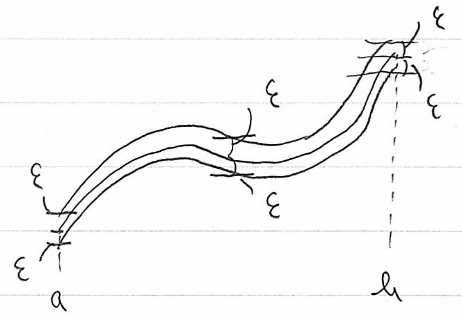
通常の連続のときは,

$x_0 \in I$ がはじめに決まっていたのに

対し, 一様連続性では,

x_0に相当するものを εとδを

決めた後に取っているところに,



εの幅で全体がはさまれる関数

最大の違いがある, といっているのと同じである.

さて, どのような関数が一様連続なのか, 次の定理が大変重要である

<u>Thm</u> $I = [a, b]$ とする。$f : I \to \mathbb{R}$ が I上連続ならば, fはI上一様連続である.

(証) 背理法で証明する。すなわち, fが一様連続でない.

i.e., $^{\exists}\varepsilon > 0, {}^{\forall}\delta > 0, {}^{\exists}x \in I, {}^{\exists}y \in I,$

$$(|x - y| < \delta) \land (|f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon)$$

と仮定すれば, 矛盾が起きることを証明すれば良い。

$\delta > 0$は任意であったので, $^{\forall}n \in \mathbb{N}$ を取り, $\delta := \frac{1}{n}$ とする.

この $\delta = \frac{1}{n}$ に対して, 一様連続性の否定より,

$^{\exists}x_n \in I, {}^{\exists}y_n \in I, (|x_n - y_n| < \delta) \land (|f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon)$

が成り立つ数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ が取れる.

$I=[a,b]$ は有界なので，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を持つ。これを $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，$\{y_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とおくと，$x_{n_j}\to x_0$ $(j\to\infty)$。ここで，$x_0\in I$ である。

Def 証明の途中に入れるべきではないのだが……。

（閉区間）I が閉区間

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset I$ に対して，

$\overline{\lim}\, x_n\in I$ かつ $\underline{\lim}\, x_n\in I$ となるとき，

すなわち，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束部分列の極限が全て I に含まれているとき，I を閉区間という

（開区間）閉区間の補集合を開区間という。

（注）最大値・最小値の定理のときも，実はこの定義を使っていたことに注意せよ！

従って，$x_0\in I$ より，

$$|y_{n_j}-x_0| = |y_{n_j}-x_{n_j}+x_{n_j}-x_0|$$
$$\leqq |y_{n_j}-x_{n_j}|+|x_{n_j}-x_0| < \frac{1}{n_j}+|x_{n_j}-x_0|$$

$j\to\infty$ のとき，$n_j\to+\infty$，$x_{n_j}-x_0\to 0$ より，

$y_{n_j}\to x_0$ となる。

連続性から、$j \to \infty$ のとき、$f(x_{n_j}) \to x_0$ かつ、$f(y_{n_j}) \to f(x_0)$、

よって、$f(x_{n_j}) - f(y_{n_j}) \to 0$ となるが、仮定より

$|f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \geqq \varepsilon$ であったから、これは矛盾である。

従って fは 有界閉区間 I上で一様連続。 □

(ex) $I = [1, 2]$, $f : I \to \mathbb{R}$ は、I上 一様連続。

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

(ex) 連続関数であっても、有界閉区間上でなければ

一様連続にならない。例えば、

$f(x) = x^2$ は、$\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{非有界}}$上 一様連続でない。

(∵) $f(x)$ が $\mathbb{R}$上 一様連続でない

$\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}\varepsilon > 0$, ${}^{\forall}\delta > 0$, ${}^{\exists}x \in \mathbb{R}$, ${}^{\exists}y \in \mathbb{R}$,

$$(|x - y| < \delta) \wedge (|f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon)$$

である。すなわち、

$$\inf(\{\sup(\{|f(x) - f(y)| \mid |x - y| < \delta, {}^{\forall}x \in \mathbb{R}, {}^{\forall}y \in \mathbb{R}\}) \mid \delta > 0, {}^{\forall}\delta \in \mathbb{R}\}) > 0$$

と同値である。

$$\sup(\{|f(x)-f(y)| \mid |x-y|<\delta\})$$

$$\geqq (x+\delta)^2 - x^2 = x^2 + 2x\delta + \delta^2 - x^2$$

$$= 2x\delta + \delta^2$$ であることに注意する。

${}^\forall\delta>0$ に対し、${}^\exists x = \dfrac{1}{2\delta}$, ${}^\exists y \in (x-\delta, x+\delta)$ ととると、

$$\sup\{|f(x)-f(y)| \mid |x-y|<\delta\}) \geqq 2\cdot\frac{1}{2\delta}\cdot\delta + \delta^2$$

$$> 1$$ より

$$\inf(\{\sup(\{|f(x)-f(y)| \mid |x-y|<\delta\}) \mid \delta>0\})$$

$> \inf(1) = 1 > 0$ より $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続ではない。

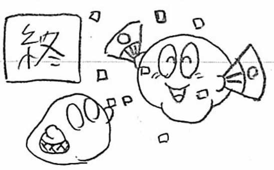
(注) $f(x)$ が $I \subset \mathbb{R}$ 上一様連続である、という定義を、

$$\inf(\{\sup(\{|f(x)-f(y)| \mid |x-y|<\delta, {}^\forall x\in I, {}^\forall y\in I\}) \mid \delta>0, {}^\forall\delta>0\}) = 0$$

と書きかえても全く同じである。一様連続かどうかの判定には、こちらの方が便利かもしれない。

。一様連続性の応用は幅広く、主に積分でその威力が発揮されることが多い。(積分もまた、大域的な性質である。)

しかし、それを書くにはかなりのページ数を要するので、残念ではあるが割愛する。 $\boxed{\text{終}}$



⇨ 終わらなかった…!

Prop $I \subset \mathbb{R}$は区間で，$f: I \to \mathbb{R}$はI上一様連続とする．

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$がCauchy列ならば，$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$もCauchy列となる．

(∵) ${}^\forall \varepsilon > 0$を取り，固定する．$f$は$I$上一様連続なので，

${}^\exists \delta > 0$, ${}^\forall x \in I$, ${}^\forall y \in I$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

が成り立つ．$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I$はCauchy列なので，この$\delta$に対し，${}^\exists N \in \mathbb{N}$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$, ${}^\forall m \in \mathbb{N}$,

$$n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \delta$$

従って，$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$となり，これは$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$がCauchy列であることを示している．$\square$

解析学入門 補足 補遺

§3 に関して，重要な例を紹介する．

(ex) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$上連続とする．

$^\forall s \in \mathbb{R}$, $^\forall t \in \mathbb{R}$ に対して，

$f(s+t) = f(s) + f(t)$ を満たすとき，f はどのような

関数であるか．　(Ans) f は1次関数で，$f(t) = t f(1)$．

(∵) $s = t = 0$ のとき，$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$

$\therefore\ f(0) = 0$ である

$s = -t$ のとき，$f(-t+t) = f(-t) + f(t)$

$\therefore\ f(0) = f(-t) + f(t) = 0$

$\therefore\ f(-t) = -f(t)$，　$({}^\forall t \in \mathbb{R})$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\ \frac{1}{2} f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ が成り立つ．

$n > 1$ に対して

$\frac{1}{2^n} f(1) = f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ が成り立つと仮定すると

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

より，$\dfrac{1}{2^n}f(1) = 2\cdot f\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ ∴ $\dfrac{1}{2^{n+1}}f(1) = f\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ "

が ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ で成立．また，$m>1$ に対して，

$\dfrac{m}{2^n}f(1) = f\left(\dfrac{m}{2^n}\right)$ が成立すると仮定すると，

$$f\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = f\left(\frac{m}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right) = f\left(\frac{m}{2^n}\right)+f\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{m}{2^n}f(1) + \frac{1}{2^n}f(1)$$

$$= \frac{m+1}{2^n}\cdot f(1)$$ となり，${}^\forall m \in \mathbb{N}$ で

成立．従って，${}^\forall m \in \mathbb{N}$，${}^\forall n \in \mathbb{N}$ で，

$f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) = \dfrac{m}{2^n}f(1)$ が成立． …(*)

ここで，${}^\forall t>0$ $(t\in\mathbb{R})$ に対して，t を2進法で表すと

$t = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[2^n t]}{2^n}$ となる．従って，小数第 n 位で切ると，

$t_n := \dfrac{[2^n t]}{2^n}$ となり，$t_n = \dfrac{m}{2^n}$ の形で表せる。また，

$t = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ より，f の連続性から $f(t) = f(\lim\limits_{n\to\infty} t_n)$

$$\underset{\text{点列連続性}}{=} \lim_{n\to\infty} f(t_n) \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} t_n f(1) \underset{f(1):\text{定数}}{=} f(1)\lim_{n\to\infty} t_n = t f(1)$$

となり，$f(t) = t f(1)$，よって，f は1次関数である． □

よく考えてみればちゃんと定義したことのない指数関数を定義しよう。

○ 単調関数

関数 $f(x)$ が条件

$$x_1 \leqq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$$

を満たすとき, $f(x)$は単調増加関数であるという.

特に, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ を

満たすときは, 狭義単調増加関数であるという.

同様に, $x_1 \leqq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$

を満たすとき, $f(x)$ は単調減少関数であるという.

特に, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ を

満たすときは, 狭義単調減少関数であるという

<u>Thm</u> $I = [a, b]$ における単調関数 $f(x)$ が $f(a)$と $f(b)$

の間にある値を全て取れば, Iで連続である

(∵) fをIで増加すると仮定して一般性を失わない。

$a < x_0 \leqq b$ とすると, $f(x)$ は $x = x_0$ で左連続

となることを示す.

<u>Claim</u> $f(x)$が (a, b) で単調のとき, $\lim_{x \to a+0} f(x)$,

$\lim_{x \to b-0} f(x)$ が共に存在する.

(☺) $f(x)$ を単調増加と仮定して一般性を失わない。

$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup\{ f(x) \in \mathbb{R} \mid a<x<b \} = A \ (\leq \infty)$$

とおくと、$\lim_{x \to b-0} f(x) = A$ であることを示す。

($A < \infty$ のとき) ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し、Aの定義から

$A - \varepsilon < f(x_1)$ を満たす x_1 ($a < x_1 < b$) が存在する。

$\delta := b - x_1$ とおくと、$\delta > 0$ である。

$0 < b - x < \delta$ を満たす任意の x を取ると、

$x > b - \delta = x_1$ であるから、fが単調増加なので

$A - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x)$. 一方、$A$の定義より

$f(x) \leq A$ (☺ $a<x<b$) よって、

$${}^\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つ。ゆえに、$\lim_{x \to b-0} f(x) = A$

$A = \infty$ のとき、${}^\forall K > 0$ に対し、Aの定義から

$K < f(x_2)$ を満たす x_2 ($a < x_2 < b$) が存在する

$\delta := b - x_2$ とおくと、$\delta > 0$ である。

$0 < b - x < \delta$ を満たす任意の x を取ると、

$x > l_1 - \delta = x_2$ であるから. fが単調増加なので,

$K < f(x_2) \leqq f(x)$, 一方. Aの定義より

$f(x) < A = \infty$ よって.

$^{\forall}x \in \mathbb{R}, \quad 0 < l_1 - x < \delta \Rightarrow f(x) > K.$

が成り立つ. ゆえに $\displaystyle\lim_{x \to l_1 - 0} f(x) = \infty.$ $\square$

<u>Claim</u> から. 左極限 $f(x_0 - 0) := \displaystyle\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ が存在して,

$f(x_0 - 0) \leqq f(x_0)$ が成り立つ.

(∵) $^{\forall}\varepsilon > 0$. 取る. $^{\exists}\delta > 0$. $^{\forall}x \in \mathbb{R}$.

$$0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0 - 0)| < \varepsilon$$

fは単調増加なので, $^{\forall}x \in \mathbb{R}$. $0 < x_0 - x < \delta$

$\Rightarrow f(x) \leqq f(x_0)$. 従って

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0 - 0) < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow f(x_0 - 0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0 - 0) + \varepsilon$. なので,

$\therefore \quad f(x_0 - 0) - \varepsilon < f(x) \leqq f(x_0)$

$\therefore \quad f(x_0 - 0) - f(x_0) < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0 - 0) \leqq f(x_0)$ $\square$

$$f(x_0-0) := \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \sup\{f(x)\in\mathbb{R} \mid a<x<x_0\}$$

でもあったので、$[a,x_0)$ で $f(x)\le f(x_0-0)$。一方、

$[x_0,b]$ で $f(x_0)\le f(x)$ であるから、

もし $f(x_0-0)<f(x_0)$ ならば、f はこの間にある値を取らないことになり、仮定に反する。ゆえに、$f(x_0-0)=f(x_0)$

同様にして、$a\le x_0<b$ となる $\forall x_0\in\mathbb{R}$ に対して

$$f(x_0+0) := \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf\{f(x)\in\mathbb{R} \mid x_0<x<b\}$$

とおくと、$f(x_0+0)=f(x_0)$ となることが示される。

従って、$\displaystyle\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ より、

$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ となるので、f は $I=[a,b]$

上連続である。

(注)
右極限 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=\alpha \Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0,\ {}^\exists\delta>0,\ {}^\forall x\in\mathbb{R},\ 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

左極限 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\beta \Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0,\ {}^\exists\delta>0,\ {}^\forall x\in\mathbb{R},\ -\delta<x-a<0 \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

右連続 $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0,\ {}^\exists\delta>0,\ {}^\forall x\in\mathbb{R},\ 0\le x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

左連続 $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a) \Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon>0,\ {}^\exists\delta>0,\ {}^\forall x\in\mathbb{R},\ -\delta<x-a\le 0 \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$

<u>Thm</u> f を区间 I における狭義単調かつ連続な関数とする。このとき，$f(x)$ の値域 $f(I)=\{f(x) \mid x\in I\}$ は区间となる．

(∵) $I \subset \mathbb{R}$ は2つ以上の元を含み，$f(x)$ は狭義単調であるから単射である。

(∵) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ or $f(x_1) > f(x_2)$ より

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ なので単射 □

よって $f(I)$ は2つ以上の元を含む。

次に，$a, b \in f(I)$，$a<c<b$ となる a, b, c を任意に取る．

$a, b\in f(I)$ なので，$f(\alpha)=a$，$f(\beta)=b$ となる $\alpha, \beta \in I$ が存在する。$f(x)$ を狭義単調増加とすると，

$a<b$ より $f(\alpha)<f(b) \Leftrightarrow \alpha<\beta$ となる．

ここで，$[\alpha, \beta] \subset I$ を考え，$f(x)$ の $[\alpha, \beta]$ への制限 $g(x)$

（つまり，$g(x)=f(x)$，$x\in[\alpha, \beta]$）を考える

$f(x)$ が連続であることから，$g(x)$ も連続になる．

また $g(\alpha)=f(\alpha)=a$，$g(\beta)=f(\beta)=b$

より $g(\alpha)<c<g(\beta)$

よって g は $[\alpha, \beta]$ 上連続だから，中间値の定理より

$^\exists \gamma\in[\alpha, \beta]$ s.t. $\alpha<\gamma<\beta$，$g(\gamma)=c$

よって $c\in f([\alpha, \beta]) \subset f(I)$ となり，$f(I)$ は区间である．

(注) 本来であれば, 区間を定義する必要がある.

$x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき,

$\{x \mid a \leq x \leq b\}$, $\{x \mid a \leq x < b\}$, $\{x \mid a < x \leq b\}$

$\{x \mid a < x < b\}$, $\{x \mid a \leq x\}$, $\{x \mid a < x\}$

$\{x \mid x \leq b\}$, $\{x \mid x < b\}$, $\mathbb{R}$.

を各々, $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b),

$[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$

と書き, これらの総称を区間という.

なお, いくつかの区間の和集合を区間和という.

実は, $a, b \in f(I)$, $a < c < b \Rightarrow c \in f(I)$ だから, $f(I)$ が区間

だというのは, 自明ではない。次の Thm がある.

Thm $\mathbb{R}$ の2つ以上の元を含む部分集合 M が区間であるための

必要十分条件は,

$$a, b \in M, \quad a < c < b \Rightarrow c \in M \quad (*)$$

が成り立つことである.

(∵) ① M が有界であるとき, 上にも下にも有界であるから, 実数の

連続性公理より, $\exists \beta \in \mathbb{R}$ s.t. $\sup M = \beta$. 即ち, $\forall x \in M$, $x \leq \beta$ である.

M が下にも有界なので, $\inf A = \alpha$ が存在して, $\forall x \in M$, $\alpha \leq x$ である.

従って $M \subset [\alpha, \beta]$ となる.

$\forall c \in (\alpha, \beta)$ とすると, c は M の下界ではないので, $\exists a \in M$ s.t.

$\alpha \leq a < c$. また $c < \beta$ より c は M の上界でもないので $\exists b \in M$ s.t.

$c < b \leq \beta$. よって $a, b \in M$, $a < c < b \Rightarrow c \in M$ より, $(\alpha, \beta) \subset M$

つまり $(\alpha,\beta) \subset M \subset [\alpha,\beta]$ より

- $\alpha \in M \wedge \beta \in M \Rightarrow M=[\alpha,\beta]$
- $\alpha \in M \wedge \beta \notin M \Rightarrow M=[\alpha,\beta)$
- $\alpha \notin M \wedge \beta \in M \Rightarrow M=(\alpha,\beta]$
- $\alpha \notin M \wedge \beta \notin M \Rightarrow M=(\alpha,\beta)$

の4パターンとなる。

② Mが上に有界で下に有界でない場合, $\exists \beta \in \mathbb{R}, \sup M=\beta \therefore \forall x \in M, x \leq \beta$

よって $M \subset (-\infty,\beta]$ となる。また, $\forall c \in (-\infty,\beta)$ に対し,

$c<\beta$ より c は M の上界でないから, $c<b \leq \beta$ となる

$b \in M$ が存在する。また M は下に有界でないので,

$\exists a \in M$ s.t. $a<c$ となる。よって $a \in M, b \in M, a<c<b$

より $c \in M$ となるので, $(-\infty,\beta) \subset M$

つまり $(-\infty,\beta) \subset M \subset (-\infty,\beta]$ より

- $\beta \in M \Rightarrow M=(-\infty,\beta]$
- $\beta \notin M \Rightarrow M=(-\infty,\beta)$

の2パターンとなる。

③ Mが下に有界で, 上に有界でない場合,

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.t. $\inf M=\alpha$. よって, $\forall x \in M$ に対して

$\alpha \leq x$ となるので, $M \subset [\alpha,+\infty)$

また，$^\forall c \in [\alpha, +\infty)$ に対し，$\alpha < c$ より c は M の下界でないから，$^\exists a \in M$ s.t. $\alpha \leqq a < c$。また，M は上に有界でないので，$^\exists b \in M$ s.t. $c < b$ となる。よって，

$a, b \in M$，$a < c < b$ より，$c \in M$ となるので，

$(\alpha, +\infty) \subset M$。つまり，$(\alpha, +\infty) \subset M \subset [\alpha, +\infty)$ より

- $\alpha \in M \Rightarrow M = [\alpha, +\infty)$
- $\alpha \notin M \Rightarrow M = (\alpha, +\infty)$

の2パターンとなる。

④ M が上にも下にも有界でない場合，仮定より $M \subset \mathbb{R}$

$^\forall c \in \mathbb{R}$ に対して，M は上に有界でないので，

$^\exists b \in M$ s.t. $c < b$，また，M は下に有界でないので，

$^\exists a \in M$ s.t. $a < c$，ゆえに，

$a, b \in M$，$a < c < b \Rightarrow c \in M$ より，$\mathbb{R} \subset M$

ゆえに，$\mathbb{R} \subset M \subset \mathbb{R}$ となるので，$M = \mathbb{R}$ となる。

なお，逆に M が区間なら，$a, b \in M$，$a < c < b \Rightarrow c \in M$ となるのは明らかである。□

(注) 実は，実数の連続性公理と同値の命題である。

○ 指数関数 (への長い道のり)

${}^{\forall} a \in \mathbb{R}$ を取る。

<u>Def</u> (ベキの公式)

(i) $a^1 = a$

(ii) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{個}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(iii) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0,\ n = 1, 2, \cdots)$

(iv) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

<u>Prop</u> ${}^{\forall} n \in \mathbb{Z}, {}^{\forall} m \in \mathbb{Z}$ に対し、次が成り立つ

(i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(ii) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(iii) $(a^n)^m = a^{nm}$

(iv) $a^n b^n = (ab)^n$

(v) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

(vi) $1^n = 1$

(vii) $0 < a < b,\ n > 0 \Rightarrow 0 < a^n < b^n$.

(☺) (i) (a) $n \geqq 1$, $m \geqq 1$ のとき,

$$a^n \cdot a^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{個}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m\text{個}})$$

$$= (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n+m\text{個}}) = a^{n+m}$$

(b) $n \geqq 1$, $m = 0$ のとき

$$a^n \cdot a^0 = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{個}}) \cdot 1 = a^n \cdot 1 = a^n$$

(c) $n \geqq 1$, $m \leqq -1$ のとき $-m \geqq 1$ であり

$$a^n \cdot a^m = \frac{a^n}{a^{-m}} = \frac{(\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n\text{個}})}{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{-m\text{個}})}$$

$$= (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n-(-m)\text{個}}) = a^{n+m}$$

$= (n+m)$個

(d) $n = 0$, $m \geqq 1$ のとき,

(b)において, n と m を入れ替えればよい。

(e) $n = 0$, $m = 0$ のとき

$$a^n \cdot a^m = a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1 = a^0 = a^{n+m}$$

(f) $n = 0$, $m \leqq -1$ のとき,

$$a^n \cdot a^m = 1 \cdot a^m = a^m = a^{n+m} \quad //$$

(g) $n \leq -1$, $m \geq 1$ のとき,

(c)において, nとmを入れ替えればよい.

(h) $n \leq -1$, $m = 0$ のとき,

(f)において, nとmを入れ替えればよい.

(i) $n \leq -1$, $m \leq -1$ のとき, $-n \geq 1$, $-m \geq 1$ であり

$$a^n \cdot a^m = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{-n\text{個}}\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{-m\text{個}}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{-(n+m)\text{個}}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = a^{n+m} \quad //$$

よって, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ に対して, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ が示された。

(ii)
$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} \underset{(i)}{=} a^{n+(-m)} = a^{n-m} \quad //$$

(iii) (a) $n \geq 1$, $m \geq 1$ のとき,

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(a \cdots \cdot a)}_{n} \cdots \cdot \underbrace{(a \cdots \cdot a)}_{n}}_{m}$$

$$= \underbrace{(a \cdot \cdots \cdot a)}_{nm\text{個}} = a^{n \cdot m}$$

(b) $n \geqq 1$, $m = 0$ のとき

$$(a^n)^m = (a^n)^0 = 1 = a^0 = a^{n\cdot 0} = a^{n\cdot m}$$

(c) $n \geqq 1$, $m \leqq -1$ のとき

$$(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}} \underset{(a)}{=} \frac{1}{a^{n\cdot(-m)}} = \frac{1}{a^{-n\cdot m}} = a^{n\cdot m} \quad //$$

(d) $n = 0$, $m \geqq 1$ のとき

$$(a^0)^m = 1^m = \underbrace{1\cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{m個} = 1 = a^0 = a^{0\cdot m} = a^{n\cdot m} \quad //$$

(e) $n = 0$, $m = 0$ のとき,

$$(a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^0 = a^{n\cdot m} \quad //$$

(f) $n = 0$, $m \leqq -1$ のとき

$$(a^0)^m = \frac{1}{(a^0)^{-m}} \underset{(d)}{=} \frac{1}{a^0} = 1 = a^0 = a^{n\cdot m} \quad //$$

(g) $n \leqq -1$, $m \geqq 1$ のとき

(c)において, n, m を入れかえる.

(h) $n \leqq -1$, $m = 0$ のとき

(f)において, n と m を入れかえる.

(i) $n \leqq -1$, $m \leqq -1$ のとき,

$$(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)^{-m}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{(-n)(-m)}}} = a^{n\cdot m} \quad //$$

(iv) (a) $n \geqq 1$ のとき

$$a^n \cdot b^n = (\overbrace{a \cdot a \cdots\cdots a}^{n個})(\overbrace{b \cdot b \cdots\cdots b}^{n個})$$

$$= (\underbrace{ab \cdot ab \cdots\cdots ab}_{n個}) = (ab)^n$$

(b) $n = 0$ のとき

$$a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (ab)^0$$

(c) $n \leqq -1$ のとき

$$a^n \cdot b^n = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} \underset{(a)}{=} \frac{1}{(ab)^{-n}} = (ab)^n \text{〃}$$

(v) $$\frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} \underset{(vi)}{=} a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{〃}$$

(vi) (本当は (vi) を示してからの方が見通しが良かった…。)

(a) $n \geqq 1$ のとき,

$$1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdots\cdots 1}_{n個} = 1 \text{〃}$$

(b) $n = 0$ のとき, $1^0 = 1$〃

(c) $n \leqq -1$ のとき

$$1^n = \frac{1}{1^{-n}} \underset{(a)}{=} \frac{1}{1} = 1 \text{〃}$$

(vii) $0 < a < b,\ n > 0 \Rightarrow 0 < a^n < b^n$

(☺) $n=1$ のとき, $a = a^1,\ b = b^1$ より

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^1 < b^1 \,_{//}$$

$n > 2$ のとき $0 < a < b,\ n > 0 \Rightarrow 0 < a^n < b^n$

が成り立つと仮定すると,

$0 < a$ より $\quad a^n < b^n \Leftrightarrow a^n \cdot a < b^n \cdot a$

$$\Leftrightarrow a^{n+1} < a \cdot b^n$$

$a < b$ より $\quad a \cdot b^n < b \cdot b^n = b^{n+1}$

$$\therefore\ a^{n+1} < a \cdot b^n < b^{n+1}$$

$$\therefore\ 0 < a^{n+1} < b^{n+1}$$

よって. 任意の $n > 0$ に対して, (vii) が成り立つ □

<u>prop</u> $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2)$ は, $\mathbb{R}$上連続.

(☺) $\tilde{f}(x) = x$ が $\mathbb{R}$ 上連続であることを示す

(☺) $^\forall x_0 \in \mathbb{R},\ ^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists \delta = \varepsilon > 0,\ ^\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)|$$

$$= |x - x_0| < \delta = \varepsilon \,_{//} \quad □$$

よって $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{個}}$

$= \underbrace{\tilde{f}(x) \cdot \tilde{f}(x) \cdot \cdots \cdot \tilde{f}(x)}_{n\text{個}}$ より

Prop から $\mathbb{R}$上連続な関数を有限回掛けた
(p.94)
関数は$\mathbb{R}$上連続なので，$f(x)$は$\mathbb{R}$上連続。□

nが偶数のとき，$f(x) = f(-x)$ より，fは偶関数

nが奇数のとき，$f(x) = -f(-x)$ より，fは奇関数

である。$E := [0, +\infty)$ とする。

Prop $f(x) : E \to \mathbb{R}$ は狭義単調増加関数
$x \mapsto x^n$

(∵) Prop (vii) より $0 < x_1 < x_2$，$n > 0 \Rightarrow 0 < x_1^n < x_2^n$

∴ $x_1^n = f(x_1)$，$x_2^n = f(x_2)$ より

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < f(x_1) < f(x_2)$ □

Prop $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

(∵) $0 < x < f(x)$ $(x \in E)$ より $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$ □

従って，$f(x)$がE上狭義単調増加かつ連続なので，

中間値の定理から，$\forall y \in [0, +\infty)$ に対し

$^\exists x_0 \in E\ (=[0,+\infty))$ s.t. $f(x_0)=\alpha$. であり，x_0は一意的

である．

(∵)（一意性）背理法．$x_0, x_1 \in \mathbb{R}$，$0<x_0<x_1$，

$f(x_0) = f(x_1) = \alpha$ と仮定すると，

Propより，$0<x_0<x_1$，$n>0 \Rightarrow 0<x_0^n<x_1^n$

$x_0^n = f(x_0)$，$x_1^n = f(x_1)$ より，$0<f(x_0)<f(x_1)$．

これは，$f(x_0)=f(x_1)$ に矛盾。

$0<x_1<x_0$ としても同様に矛盾が導けるので，

$x_0 = x_1$。従って，$f(x_0)=\alpha$ を満たす

解 x_0は一意的である．□

$f(x_0)=\alpha \iff x_0^n = \alpha$ であり，これを満たすx_0を

$x_0 := \sqrt[n]{\alpha}$ or $x_0 := \alpha^{\frac{1}{n}}$ と書き，

x_0をαのn乗根という。(i.e., $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$)

(注) 特に，nが奇数のときは，$f(x)$を$\mathbb{R}$上で考えられる。

すなわち，$f(x)$は$\mathbb{R}$上連続で，

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ なので，

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f(x_0)=\alpha$ を満たす $x_0 \in \mathbb{R}$ が唯一つ存在する.

$f(x_0)=\alpha \iff x_0^n=\alpha$ であるので, $\alpha<0$ に対しても

$$x_0 := \sqrt[n]{\alpha} \quad \text{or} \quad x_0 := \alpha^{\frac{1}{n}} \quad と書き$$

x_0 を α の n 乗根という。 (i.e., $(\sqrt[n]{\alpha})^n=\alpha$)

つまり, n が奇数ならば, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して α の n 乗根を定義できる。

以上の議論から, α を y に置きかえると

n が奇数のとき, $\forall y \in \mathbb{R}$ に対して y の n 乗根は唯一つ存在するので, $\varphi(y) := y^{\frac{1}{n}}$ と定義すると, $\varphi(y)$ は唯一つの実数を表す. 従って, $\varphi(y)$ は $\mathbb{R}$ 上定義された関数である.

n が偶数のとき, $\forall y \in E$ に対して y の n 乗根は唯一つ存在するので, $\varphi(y) := y^{\frac{1}{n}}$ と定義すると. $\varphi(y)$ は唯一つの実数を表す。従って. $\varphi(y)$ は. E 上定義された関数である.

よって, n が奇数のとき, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

n が偶数のとき, $\varphi : E \to E \quad (E := [0, +\infty))$

である。

$0^n = 0$ より. $0 = 0^{\frac{1}{n}}$ $\therefore$ $\varphi(0) = 0$ である.

<u>Prop</u> $\varphi(y)$は狭義単調増加関数

(☺) (i) nが奇数の場合.

$\forall y_1, \forall y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 < y_2$ とする.

(A) $y_1 < y_2 < 0$ の場合.

<u>Claim 1</u> $\forall y \in \mathbb{R}$, $y < 0$ に対して, $\varphi(y) < 0$.

(☺) 定義から, $(\sqrt[n]{y})^n = y$ なので, $\varphi(y) = \sqrt[n]{y}$ より,

$(\varphi(y))^n = (\sqrt[n]{y})^n = y$.

となる. $n = 2m+1$ $(m = 1, 2, \cdots)$ であるから,

$(\varphi(y))^n = (\varphi(y))^{2m+1}$

$= (\varphi(y))^{2m} \cdot \varphi(y) = y < 0$.

$\therefore$ $\varphi(y)^{2m} \geq 0$, $y < 0$ より $\varphi(y) < 0$ //

<u>Claim 2</u>, $0 > x_1 > x_2$, n; 奇数 $(n > 0)$ $\Rightarrow 0 > x_1^n > x_2^n$

(☺) $n = 1$ のとき, $x_1^1 = x_1$, $x_2^1 = x_2$ より

$0 > x_1 > x_2 \Rightarrow 0 > x_1^1 > x_2^1$ //

$n = 2k+1$ のとき,

$0 > x_1 > x_2 \Rightarrow 0 > x_1^n > x_2^n$ が成り立つ

と仮定する。

$0 > x_1 > x_2 \Rightarrow 0 < x_1^2 < x_2^2$ である。

(∵) $0 > x_1 > x_2$ と仮定する。このとき、

$0 < |x_1| < |x_2|$ であるから、

$$0 = 0 \cdot |x_1| < |x_1| \cdot |x_1| < |x_1| \cdot |x_2| < |x_2| \cdot |x_2|$$

$$\therefore\ 0 < |x_1|^2 < |x_1| \cdot |x_2| < |x_2|^2$$

$$\therefore\ 0 < x_1^2 < |x_1| \cdot |x_2| < x_2^2$$

$$\therefore\ 0 < x_1^2 < x_2^2 \text{〃} \quad \square$$

従って、 $x_2^n \cdot x_2^2 < x_2^n \cdot x_1^2 < x_1^n \cdot x_1^2 < 0$ より

$$x_2^{n+2} < x_1^{n+2} < 0 \text{〃}$$

∴ 任意の正の奇数 n に対して、

$$0 > x_1 > x_2 \Rightarrow 0 > x_1^n > x_2^n \quad \square$$

今、 $y_1 < y_2 < 0$ であり、Claim 1 から

$\varphi(y_1) < 0$, $\varphi(y_2) < 0$ である。今、 $0 > \varphi(y_1) \geq \varphi(y_2)$ と

仮定すると、 Claim 2 から $0 > (\varphi(y_1))^n \geq (\varphi(y_2))^n$

定義から $(\varphi(y))^n = (\sqrt[n]{y})^n = y$ なので、

$0 > y_1 \geq y_2$ となるが これは矛盾。 ∴ $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$

(B) $y_1 < 0 \leq y_2$ の場合.

Claim 3 $\forall y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ に対して, $\varphi(y) > 0$

(∵) $(\varphi(y))^n = y$ である。 $n = 2m+1$ とおくと,

$$(\varphi(y))^n = (\varphi(y))^{2m+1}$$
$$= (\varphi(y))^{2m} \cdot \varphi(y) = y > 0$$

$(\varphi(y))^{2m} \geqq 0$, $y > 0$ より, $\varphi(y) > 0$ // □

Claim 1, Claim 3, $\varphi(0) = 0$ より, $\varphi(y_1) < 0 \leq \varphi(y_2)$

$$\therefore \varphi(y_1) < \varphi(y_2)$$

(C) $0 \leq y_1 < y_2$ の場合.

Claim 3 から, $0 \leq \varphi(y_1)$, $0 < \varphi(y_2)$ であり,

$\varphi(y_2) \leq \varphi(y_1)$ と仮定すると, prop (vii) から,

$$0 < \varphi(y_2) \leq \varphi(y_1) \Rightarrow 0 < (\varphi(y_2))^n \leq (\varphi(y_1))^n$$

$$\therefore 0 < y_2 \leq y_1$$

となり, 仮定に矛盾。よって, $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$

(ii) nが偶数の場合

${}^\forall y_1, {}^\forall y_2 \in E := [0, +\infty)$, $y_1 < y_2$ とする。

$\forall y \in E$ に対して, $f(x_0) = y$ となる $x_0 \in E$ を $\sqrt[n]{y} = \varphi(y)$

と書くと定義したので, $\varphi(y) \geqq 0$.

$\varphi(y_1) \geqq \varphi(y_2)$ と仮定すると, prop (vii) から

$0 < \varphi(y_2) \leqq \varphi(y_1)$ より $0 < (\varphi(y_2))^n \leqq (\varphi(y_1))^n$

定義から $^\forall y \in E$ に対して $(\varphi(y))^n = (\sqrt[n]{y})^n = y$

となるので, $0 < y_2 \leqq y_1$ を得るが, これは仮定に矛盾。従って, $\varphi(y_1) < \varphi(y_2)$

(i), (ii) から $\varphi(y)$ は狭義単調増加関数である □

prop $^\forall k \in \mathbb{R}$ に対して $^\exists y \in \mathbb{R}$ s.t. $\varphi(y) = k$.

(∵) k に対して $y = k^n$ とおくと

$$(\varphi(k^n))^n - k^n = 0$$

$$(\varphi(k^n) - k)\left((\varphi(k^n))^{n-1} + (\varphi(k))^{n-2}k + (\varphi(k))^{n-3}k^2 + \cdots + (\varphi(k^n))k^{n-2} + k^{n-1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(k^n) - k = 0$$

$$\text{or} \quad \sum_{k=1}^{n} (\varphi(k^n))^{n-k} k^{k-1} = 0.$$

(i) n が奇数のとき $k < 0 \Leftrightarrow k^n < 0 \Leftrightarrow \varphi(k^n) < 0$

$k \geqq 0 \Leftrightarrow k^n \geqq 0 \Leftrightarrow \varphi(k^n) \geqq 0$.

(∵ $f(x) = x^n$ の符号と x の符号は一致する.) より.

$\therefore$ $1 \leq {}^\forall k \leq n$ に対し，${}^\forall K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ で

$$(\varphi(K^n))^{n-k} \cdot K^{k-1} > 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} (\varphi(K^n))^{n-k} K^{k-1} > 0$$

$\because$ $K=0$ のとき，$\varphi(K^n)^{n-k} \cdot K^{k-1} = 0$. $(1 \leq {}^\forall k \leq n)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} (\varphi(K^n))^{n-k} \cdot K^{k-1} = 0.$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} (\varphi(K^n))^{n-k} \cdot K^{k-1} = 0 \iff K = 0.$$

(ii) nが偶数のとき，$K \in E \subset \mathbb{R}$ に制限して考える。

$K \geq 0 \iff \varphi(K^n) \geq 0$ であり

$$\left.\begin{array}{l} K > 0 \iff (\varphi(K^n))^{n-k} \cdot K^{k-1} > 0, \\ K = 0 \iff (\varphi(K^n))^{n-k} \cdot K^{k-1} = 0, \end{array}\right. \quad (1 \leq {}^\forall k \leq n)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} (\varphi(K^n))^{n-k} \cdot K^{k-1} = 0 \iff K = 0.$$

以上から $\varphi(0) = 0 \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\varphi(K^n))^{n-k} \cdot K^{k-1} = 0.$

となるので，$(\varphi(K^n))^n - K^n = 0 \Rightarrow \varphi(K^n) - K = 0.$

$\therefore$ $\varphi(K^n) = K$ となるので 命題が成り立つ。 $\square$

以上から，φが $\mathbb{R}$ or E の全ての値を取り，単調関数なので，φは連続関数である。

◦ 合成関数

ここでは, $X\subset\mathbb{R}$, $Y\subset\mathbb{R}$, $Z\subset\mathbb{R}$, とする.

$$f: \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ \cup\!\! & & \cup\!\! \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} Y & \to & Z \\ \cup\!\! & & \cup\!\! \\ y & \mapsto & g(y) \end{array}$$

とすると. $f(x)\in Y$ なので, 関数 $g\circ f(x) := g(f(x))$

が定義できる. $g\circ f(x)$ を. gとfとの合成関数という

(ex) $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2$ のとき,

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$ //

すなわち. fの値域が gの定義域に含まれていれば,
合成関数が定義できる。

(ex) (合成関数が定義できない例)

$f(x) = -x^2$, $g(x) = \log x$ とすると.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & (-\infty, 0] \\ \cup\!\! & & \cup\!\! \\ x & \mapsto & -x^2 \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ \cup\!\! & & \cup\!\! \\ x & \mapsto & \log x \end{array}$$

となるので, $g\circ f(x) = \log(-x^2)$ は定義できない。

<u>Thm</u>（合成関数の極限）

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ とする。$g \circ f$ が定義され、

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ かつ $\lim_{y \to \alpha} g(y) = \beta$ とすると、

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{x \to a} g \circ f(x) = \beta$$

(∵) $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$0 < |y - \alpha| < \delta \Rightarrow |g(y) - \beta| < \varepsilon$$

この $\delta > 0$ に対して、$\exists \rho > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$0 < |x - a| < \rho \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \delta$$

合成関数の定義から、$0 < |y - \alpha| < \delta \supset \{f(x) \mid 0 < |x - a| < \rho\}$

となるので、$0 < |x - a| < \rho \Rightarrow 0 < |f(x) - \alpha| < \delta$

$y = f(x)$ とおくと、$0 < |f(x) - \alpha| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - \beta| < \varepsilon$

となり。

$$0 < |x - a| < \rho \Rightarrow |g(f(x)) - \beta| < \varepsilon \quad \square$$

<u>Thm</u>（合成関数の連続性）

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ とする。

f が X 上で連続, g が Y 上で連続であるとき,

合成関数 $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ は X 上連続である。

(☺) $\forall c \in X$ を取れば, f が X 上で連続であるから

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

また, g が Y 上連続であるから, $f(c) \in Y$ に対して

$$\lim_{y \to f(c)} g(y) = g(f(c))$$ となる。

$y = f(x)$ とすれば, 前ページの定理より

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(f(c)) \qquad \square$$

さて, この定理を用いて, 分数の指数 $a^{\frac{p}{q}}$ を定義しよう。

$E := [0, +\infty)$ とする。

$$\begin{array}{rcl} f: E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & x^p \end{array}$$
$(p \in \mathbb{Z},\ p \geq 1)$ とする。

すなわち, $y = f(x) = x^p$.

f は p.127 の <u>prop</u>, p.126 の <u>prop</u> より, E 上連続な狭義単調増加関数である。

また，$f(0) = 0^p = 0$ より，$\{f(x) \mid x \in E\} = [0, +\infty) = E$

となる。次に，
$$\begin{array}{cccc} g: & E & \to & \mathbb{R} \\ & \Psi & & \Psi \\ & y & \mapsto & \sqrt[q]{y} \end{array} \quad (q \in \mathbb{Z},\ q \geqq 1)$$

とおくと，p.129 の $\varphi(y)$ と $g(y)$ は同じであるから，

$g: E \to E$ であり，連続な狭義単調増加関数である。

なお，$\displaystyle\lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$ である。

(∵) $\forall K > 0$ を取る。p.133 の ~~prop~~ より，$^\exists y \in \mathbb{R}$ s.t.

$g(y) = K$ であり，より具体的に $y = K^q$ である。

このとき，$^\exists R \in \mathbb{R}$ s.t. $R = K^q$ とおくと，

$K^q = R < y < +\infty$ を満たす任意の y に対して，

$g(y)$ の狭義単調性から，$g(R) < g(y) < +\infty$

となる。$g(R) = g(K^q) = K$ であるから，$K < g(y) < +\infty$

となるので，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(y) = +\infty$ が示された。 □

これから，合成関数
$$\begin{array}{cccc} g \circ f: & E & \to & E \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \mapsto & \sqrt[q]{x^p} \end{array}$$
は，

p.137 の Thm より，E上連続であり，狭義単調増加関数である。

定義から，$g\circ f(0) = \sqrt[q]{0^p} = \sqrt[q]{0} = 0$ であり，

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ であるから，$\lim_{x\to+\infty} g\circ f(x) = +\infty$

となる。

次に，$f : E \to E$ $(p\in\mathbb{Z},\ p\leqq -1)$ とする。
$\quad\quad x \mapsto x^p$

すなわち，$f(x) = x^p = \dfrac{1}{x^{-p}} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-p}$ $\begin{pmatrix}-p\in\mathbb{Z}, \\ -p\geqq 1\end{pmatrix}$

である。恒等的に1となる関数は連続であり，xは E上

xに関して連続であるから，その商 $\dfrac{1}{x}$ も連続関数

となる。よって，$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-p}$ は連続関数 $\dfrac{1}{x}$ の積なので，同様に

連続関数となる。また，$0 < x_1 < x_2 < +\infty$ において，

$0 < \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} < +\infty$ となるので，$\dfrac{1}{x}$ は狭義単調減少であり，

関数 x^n $(n\in\mathbb{Z},\ n\geqq 1)$ が狭義単調増加であるから

$0 < \left(\dfrac{1}{x_2}\right)^{-p} < \left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{-p} < +\infty$．よって，$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-p}$ は狭義

単調減少関数となる。従って，$f(x) = x^p$ は E上連続な

狭義単調減少関数である。

なお，$\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ である。

(☺) ($\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty$ について)

$^\forall K>0$ を取る。このとき，$^\exists R=\dfrac{1}{\sqrt[-p]{K}}>0$ $(-p\in\mathbb{Z},\ -p\geqq 1)$

とすると，$0<{}^\forall x<R \iff 0<{}^\forall x<\dfrac{1}{\sqrt[-p]{K}}$ に対し，$f(x)$ は単調減少なので

$$f(x)>f\left(\frac{1}{\sqrt[-p]{K}}\right)=\left(\frac{1}{(\sqrt[-p]{K})}\right)^p=(\sqrt[-p]{K})^{-p}=K$$

となるので，$0<{}^\forall x<R \Rightarrow K<f(x)$.

($\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ は，これまでも多数扱ったため略) □

従って，$p\leqq -1$，$p\in\mathbb{Z}$ の場合，合成関数 $g\circ f(x)=\sqrt[q]{x^p}$

は連続な狭義単調減少関数であり，上の2つの極限から

$\lim_{x\to+0} g\circ f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to+\infty} g\circ f(x)=0$ となる。

。$^\forall a>0$ とする。$^\forall p\in\mathbb{Z}$，$^\forall q\in\mathbb{Z}$ $(q\geqq 1)$ に対し，

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$$

で，a の分数の指数を定義する。

なお，$\xi\in\mathbb{Q}$ としたとき，$\xi=\dfrac{p}{q}$ (q は正の整数，$p\in\mathbb{Z}$)

という表わし方は唯一つとは限らない。

念の為に、$\xi = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ とする。$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p'}{q'}}$ を示す.

(☺) $p = p' = 0$ のときは、$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p'}{q'}} = a^0 = 1$ となる.

そうでない場合、$\sqrt[q]{a^p} = \alpha$, $\sqrt[q']{a^{p'}} = \beta$ とおくと、

$a^p = \alpha^q$, $a^{p'} = \beta^{q'}$. すなわち、

$a^{pp'} = \alpha^{qp'}$, $a^{p'p} = \beta^{q'p}$ となるので、$\alpha^{qp'} = \beta^{q'p}$

今、$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q$ なので、$\alpha = \beta$. □

以上から、$y = x^\xi$ $(\xi \in \mathbb{Q})$ という関数も考えられる.

$\xi > 0$ のとき、$\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x^\xi \end{array}$ は連続な狭義単調増加関数

$\xi < 0$ のとき、$\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x^\xi \end{array}$ は連続な狭義単調減少関数

となる。$\xi \in \mathbb{Q}$ に対しても、指数法則が成り立つことを確かめよう.

<u>prop</u> $a > 0$, $b > 0$, $\xi = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$

とするとき、(i) $\sqrt[q]{ab} = \sqrt[q]{a}\sqrt[q]{b}$

(ii) $\sqrt[q]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}$

(iii) $\sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[nq]{a}$

(iv) $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

(☺) (i) $\left(\sqrt[q]{ab}\right)^q = ab$

$\left(\sqrt[q]{a}\ \sqrt[q]{b}\right)^q = \left(\sqrt[q]{a}\right)^q \cdot \left(\sqrt[q]{b}\right)^q = ab$

よって，$y = x^q\ (q \in \mathbb{N})$ が単射 $\left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$

なので，$\sqrt[q]{ab} = \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b}$ //

(ii) $\left(\sqrt[q]{\dfrac{a}{b}}\right)^q = \dfrac{a}{b}$

$\left(\dfrac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}\right)^q = \dfrac{\left(\sqrt[q]{a}\right)^q}{\left(\sqrt[q]{b}\right)^q} = \dfrac{a}{b}$

$y = x^q\ (q \in \mathbb{N})$ は単射なので，$\sqrt[q]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}$

(iii) $\left(\sqrt[n]{\sqrt[q]{a}}\right)^{nq} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[q]{a}}\right)^n\right)^q = \left(\sqrt[q]{a}\right)^q = a$,

$\left(\sqrt[nq]{a}\right)^{nq} = a$

よって，$y = x^{nq}$ ($n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ より $nq \in \mathbb{N}$ なので)

は単射なので，$\sqrt[n]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[nq]{a}$ //

(iv) $\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p$

$\left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^p\right)^q = \left(\sqrt[q]{a}\right)^{pq} = \left(\left(\sqrt[q]{a}\right)^q\right)^p = a^p$.

よって．$y = x^q$ は単射なので，$\sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ // □

Thm (有理数の指数法則)

$a>0,\ b>0,\ \alpha\in\mathbb{Q},\ \beta\in\mathbb{Q}$ のとき、

(i) $a^{\alpha+\beta}=a^{\alpha}\cdot a^{\beta}$

(ii) $a^{\alpha-\beta}=\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}$

(iii) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$

(iv) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

(vi) $1^{\alpha}=1$

(☺) $\alpha=\dfrac{m}{n},\ \beta=\dfrac{r}{s}$ ($m,r\in\mathbb{Z},\ n,s\in\mathbb{N}$) とする。

(i) $a^{\alpha+\beta}=a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}=a^{\frac{ms+nr}{ns}}$

$=\sqrt[ns]{a^{ms+nr}}=\sqrt[ns]{a^{ms}\cdot a^{nr}}$

$=\sqrt[ns]{a^{ms}}\cdot\sqrt[ns]{a^{nr}}\overset{※}{=}\sqrt[n]{a^{m}}\cdot\sqrt[s]{a^{r}}$

$=a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=a^{\alpha}\cdot a^{\beta}$

(※) $\sqrt[ns]{a^{ms}}=a^{\frac{ms}{ns}}$ となるが、$\dfrac{ms}{ns}=\dfrac{m}{n}$ なので $a^{\frac{ms}{ns}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$

$\therefore\ \sqrt[ns]{a^{ms}}=\sqrt[n]{a^{m}}$ となる。

(ii) $a^{\alpha-\beta}=a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}=a^{\frac{ms-nr}{ns}}$

$=\sqrt[ms]{a^{ms-nr}}=\sqrt[ns]{\dfrac{a^{ms}}{a^{nr}}}=\dfrac{\sqrt[ns]{a^{ms}}}{\sqrt[ns]{a^{nr}}}$

$$= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{a^\alpha}{a^\beta}$$

(iii) $$(a^\alpha)^\beta = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r} = \sqrt[s]{\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^r}$$

$$= \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mr}} = \left(\sqrt[s]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mr} = \left(\sqrt[sn]{a}\right)^{mr}$$

$$= \sqrt[sn]{a^{mr}} = a^{\frac{mr}{ns}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}} = a^{\alpha\beta}$$

(iv) $$(ab)^\alpha = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m}$$

$$= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

(v) $$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

(vi) $$1^\alpha = 1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1.$$

いよいよ, $\alpha \in \mathbb{Q}$ から $\alpha \in \mathbb{R}$ へと正確に拡張する為の準備へ入ろう.

<u>Thm</u> $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ であり, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ で $\alpha < \beta$ ならば.

$$a^\alpha < a^\beta$$ が成り立つ.

(☺) $\alpha<\beta$ より、$\gamma=\beta-\alpha$ とおくと、$\gamma>0$ であり、

$$a^{\beta}=a^{(\beta-\alpha)+\alpha}=a^{\gamma+\alpha}=a^{\gamma}\cdot a^{\alpha}$$

$\gamma>0$ であるから、x^{γ} は $E:=[0,+\infty)$ 上連続な狭義単調増加関数である。よって、$a>1$ より

$$a^{\gamma}>1^{\gamma}=1$$

ここで、$a^{\alpha}>0$ である（これは $a>0$ でも成立する）

(☺) $\alpha=\frac{p}{q}$ $(p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N})$ とおくと

$$a^{\alpha}=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{p}}$$

ここで、$a>0$ より、$a^{p}>0$ であり、$\sqrt[q]{x}$ は E上連続な狭義単調増加関数なので、$\sqrt[q]{a^{p}}>\sqrt[q]{0}=0$. □

よって $a^{\gamma}>1 \iff a^{\gamma}\cdot a^{\alpha}>a^{\alpha}$

が成り立つので、$\alpha^{\beta}>a^{\alpha}$ となる。□

<u>Thm</u> $a\in\mathbb{R}$, $0<a<1$ であり、$\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ で $\alpha<\beta$ ならば、

$a^{\alpha}>a^{\beta}$ が成り立つ。

(☺) $\alpha<\beta$ より、$\gamma=\beta-\alpha$ とおくと、$\gamma>0$ であり、

$$a^{\beta}=a^{(\beta-\alpha)+\alpha}=a^{\gamma+\alpha}=a^{\gamma}\cdot a^{\alpha}$$

$\gamma>0$ であるから、x^{γ} は E上連続な狭義単調増加関数

であり，$0<a<1$ であるから，

$$0^\gamma < a^\gamma < 1^\gamma \iff 0 < a^\gamma < 1$$

また，$a^\alpha > 0$ であるから

$$a^\gamma < 1 \iff a^\gamma \cdot a^\alpha < a^\alpha$$

よって，$a^\beta < a^\alpha$ となる。□

<u>Thm</u> $a \in \mathbb{R}$, $a>1$ とする。このとき，

$$A := \{a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > 0\}$$

$$B := \{a^\eta \mid \eta \in \mathbb{Q},\ \eta < 0\}$$

とおけば，

$$\inf A = 1, \quad \sup B = 1 \quad \text{である.}$$

(∵) $a^\xi \in A$ ならば，$\xi > 0$ より P.143 の <u>Thm</u> より，$a>1$ なので

$a^\xi > a^0 = 1$ となり，1 は A の下界である。よって

$$\inf A \geqq 1$$

$l = \inf A$ とおく。仮に，$l > 1$ とする。

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し，$\dfrac{1}{n} > 0$ であるから，$a^{\frac{1}{n}} \geqq l$，

すなわち，$(a^{\frac{1}{n}})^n \geqq l^n \iff a \geqq l^n$ となる。(∵ x^n は単調増加関数)

$l > 1$ より，$l = 1 + h\ (h > 0)$ とおくと，

$$l^n = (1+h)^n = 1 + nh + {}_nC_2 \cdot h^2 + \cdots + {}_nC_k h^k + \cdots + {}_nC_n h^n$$
$$\geqq 1 + nh > nh$$

よって、$^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \geqq h^n > nh \iff a > nh \text{ が成立する.}$$

しかし、これはアルキメデスの原理より、矛盾する. 例えば、$\left[\frac{a}{h}\right]+1 = n \in \mathbb{N}$

とおけば、 $nh = \left(\left[\frac{a}{h}\right]+1\right)h > \frac{a}{h} \cdot h = a$ となり、矛盾。

よって $h \leqq 1$ であり、1 は A の1つの下界であるから、$h = 1$

$\therefore$ $\inf A = 1$ となる.

次に、$a^\eta \in B$ ならば、$\eta < 0$ より $a^\eta < a^0 = 1$ となる.

よって、1 は B の上界であるから、$\sup B \leqq 1$.

同様に、$c = \sup B$ とおく。 $c < 1$ と仮定する.

このとき、 $1 < \frac{1}{c}$ となる。$\inf A = 1$ であるから、

$^\exists a^\xi \in A$ s.t. $1 \leqq a^\xi < \frac{1}{c}$ $(\xi \in \mathbb{Q},\ \xi > 0)$

つまり、 $1 \geqq a^{-\xi} > c$ $(-\xi \in \mathbb{Q},\ -\xi < 0)$

となるので、c が B の上限であることに矛盾する。よって、

$$\sup B = 1.$$

<u>Thm</u> $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ とする。このとき、

$$C = \{a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > 0\}$$
$$D = \{a^\eta \mid \eta \in \mathbb{Q},\ \eta < 0\}$$

とおけば、$\sup C = 1$, $\inf D = 1$ である。(証明は上と全く同様なので略)

Thm $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ とする.

$$a^\alpha = \inf\{a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha\}$$

である。

(∵) $M = \{a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha\}$ とおく。$a^\xi \in M$ ならば

$a > 1$ であり, $\xi > \alpha$ なので, $a^\xi > a^\alpha$. よって

a^α は M の下界である. $l = \inf M$ として,

仮に $l > a^\alpha$ とすると, $l - a^\alpha > 0$ である.

$\varepsilon := l - a^\alpha > 0$ とおく。すると, $a^\alpha > 0$ であるから

$\dfrac{\varepsilon}{a^\alpha} > 0$. 前の Thm より, $\inf\{a^\eta \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > 0\} = 1$

なので, $\exists a^\eta$ $(\eta \in \mathbb{Q}, \eta > 0)$ s.t. $1 + \dfrac{\varepsilon}{a^\alpha} > a^\eta \geq 1$.

$1 + \dfrac{\varepsilon}{a^\alpha} > a^\eta \Leftrightarrow a^\alpha + \varepsilon > a^\eta \cdot a^\alpha = a^{\alpha+\eta}$

$a^\alpha + \varepsilon = l = \inf M$ より, $\inf M > a^{\alpha+\eta}$.

しかし, $\alpha + \eta \in \mathbb{Q}$, $\alpha + \eta > \alpha$ であるから, $a^{\alpha+\eta} \in M$ である.

よって, $a^{\alpha+\eta} \geq \inf M$ となるので, 矛盾。

よって, $l \leq a^\alpha$ であり, a^α は M の下界なので, $l = a^\alpha$. ∎

<u>Thm</u> $a\in\mathbb{R}$, $0<a<1$, $\alpha\in\mathbb{Q}$ とする。

$$a^\alpha = \sup\{a^\xi \mid \xi\in\mathbb{Q},\ \xi>\alpha\}$$ となる。

(☺) $M=\{a^\xi \mid \xi\in\mathbb{Q},\ \xi>\alpha\}$ とおく。$a^\xi\in M$ ならば、

$0<a<1$ であり、$\xi>\alpha$ なので、$a^\xi<a^\alpha$. よって

a^α は M の上界である。$l=\sup M$ として、仮に

$l<a^\alpha$ とする。$\varepsilon := a^\alpha - l > 0$ とおく。すると、

$a^\alpha>0$ であるから、$\dfrac{\varepsilon}{a^\alpha}>0$. 前の <u>Thm</u> より、

$\sup\{a^\eta \mid \eta\in\mathbb{Q},\ \eta<0\}=1$ なので、

$\exists a^\eta\ (\eta\in\mathbb{Q},\ \eta<0)$ s.t. $1-\dfrac{\varepsilon}{a^\alpha}<a^\eta\leq 1$

ここで、$1-\dfrac{\varepsilon}{a^\alpha}<a^\eta \Leftrightarrow a^\alpha-\varepsilon<a^\eta\cdot a^\alpha = a^{\alpha+\eta}$

$a^\alpha-\varepsilon = l = \sup M$ であるから、$\sup M < a^{\alpha+\eta}$.

一方、$\alpha+\eta\in\mathbb{Q}$, $\alpha+\eta<\alpha$ であるから、$a^{\alpha+\eta}\in M$ となる。

よって、$a^{\alpha+\eta}\leq \sup M$ となるので、矛盾。

よって、$l\leq a^\alpha$ であり、a^α は M の下界なので、$l=a^\alpha$ □

いよいよ、実数の指数を定義しよう。

Def ○ $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (=無理数) のとき、

$$a^\alpha = \inf \{ a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > \alpha \}$$

○ $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき、

$$a^\alpha = \sup \{ a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > \alpha \}$$

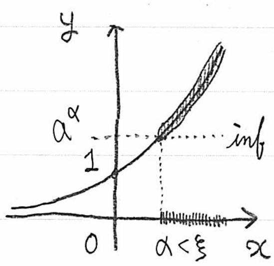
とおく。更に、$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ のとき、

$$1^\alpha = 1$$

と定める。

この定義と、先程の定理から、一般に、

(image)

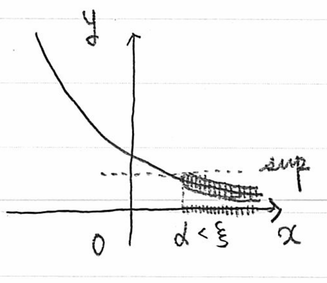


○ $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき

$$a^\alpha = \inf \{ a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > \alpha \}$$

○ $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき、

$$a^\alpha = \sup \{ a^\xi \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > \alpha \}$$



○ $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき、 $1^\alpha = 1$

と定義できるのである。

定義したからには，指数法則や指数関数の連続性について示しておきたい。

<u>Thm</u>　$a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば，

$$a^{\alpha+\beta} = a^{\alpha} a^{\beta}$$

(☺)　$\alpha < \xi$, $\beta < \eta$ となるような $\forall \xi, \forall \eta \in \mathbb{Q}$ を取る。$\xi + \eta \in \mathbb{Q}$ であり，

$\alpha + \beta < \xi + \eta$ となるので　$a > 1$ より

$$a^{\alpha+\beta} = \inf\{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha+\beta\} \leq a^{\xi+\eta} = a^{\xi} \cdot a^{\eta}$$

$$\therefore \frac{a^{\alpha+\beta}}{a^{\xi}} \leq a^{\eta}$$

これは，$\dfrac{a^{\alpha+\beta}}{a^{\xi}}$ が，$\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > \beta\}$ の下界であることを示している。

よって，前の <u>Thm</u> より $\inf\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > \beta\} = a^{\beta}$ なので

$$\frac{a^{\alpha+\beta}}{a^{\xi}} \leq a^{\beta}.$$

すなわち，$\dfrac{a^{\alpha+\beta}}{a^{\beta}} \leq a^{\xi}$ である。これは，$\dfrac{a^{\alpha+\beta}}{a^{\beta}}$ が

$\{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha\}$ の下界であることを示している。

よって，前の <u>Thm</u> より $\inf\{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha\} = a^{\alpha}$ なので

$$\frac{a^{\alpha+\beta}}{a^{\beta}} \leq a^{\alpha} \quad \therefore \quad a^{\alpha+\beta} \leq a^{\alpha} \cdot a^{\beta}$$

次に，$\alpha+\beta<\nu$ $(\nu\in\mathbb{Q})$ であるような ν を取る．

更に，$\rho:=\nu-(\alpha+\beta)>0$ とおく。また，$\xi\in\mathbb{Q}$ を

$$\alpha<\xi<\alpha+\rho \quad (\xi\in\mathbb{Q})$$

を満たすように取り直す．また，$\eta=\nu-\xi$ とおけば，$\eta\in\mathbb{Q}$ であり，

$$\eta=\nu-\xi>\nu-(\alpha+\rho)=\nu-\{\alpha+\nu-(\alpha+\beta)\}$$

$$=\nu-\alpha-\nu+\alpha+\beta=\beta$$ となり，$\eta>\beta$ を

満たすように取り直せる．$\eta+\xi=\nu$ であるから，

$$a^\nu=a^{\eta+\xi}=a^\eta\cdot a^\xi$$

$$\geqq \inf\{a^\eta\mid\eta\in\mathbb{Q},\ \eta>\beta\}\cdot\inf\{a^\xi\mid\xi\in\mathbb{Q},\ \xi>\alpha\}$$

$$=a^\alpha\cdot a^\beta$$

これは，$a^\alpha a^\beta$ が，$\{a^\nu\mid\nu\in\mathbb{Q},\ \nu>\alpha+\beta\}$ の下界であることを

示しているので，$a^{\alpha+\beta}\geqq a^\alpha\cdot a^\beta$

以上から，$a^{\alpha+\beta}=a^\alpha\cdot a^\beta$ //

<u>Thm</u> $a\in\mathbb{R}$，$0<a<1$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ならば，

$$a^{\alpha+\beta}=a^\alpha a^\beta$$

(証明は，上に述べたものとほぼ同じで，$a^\alpha=\sup\{a^\xi\mid\xi\in\mathbb{Q},\ \xi>\alpha\}$ であることに気を付ければよい。)

(注) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ のとき, $1^{\alpha+\beta} = 1^{\alpha} = 1^{\beta} = 1$ であるから

$$1^{\alpha+\beta} = 1^{\alpha} \cdot 1^{\beta}$$ である.

Cor $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$ ならば,

$$a^{-\alpha} = (a^{\alpha})^{-1}$$

(証) $a^{-\alpha} \cdot a^{\alpha} = a^{(-\alpha)+\alpha} = a^{0} = 1$

$$\therefore\ a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}} = (a^{\alpha})^{-1} \qquad \square$$

Cor $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば,

$$a^{\alpha-\beta} = \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}$$

(証) $a^{\alpha-\beta} = a^{\alpha+(-\beta)} = a^{\alpha} \cdot a^{-\beta}$

$$= a^{\alpha} \cdot (a^{\beta})^{-1} = \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} \qquad \square$$

意外かもしれないが，実数の指数法則を示すのは，

指数関数が $\mathbb{R}$ 上連続で，$a>1$ のとき狭義単調増加

$0<a<1$ のとき，狭義単調減少であることを示してからの方が

上手く示せたりする。

<u>Def</u>　$a\in\mathbb{R}$，$a>0$ のとき，$\mathbb{R}$ 上定義された関数

$$y=a^x$$

を，a を底とする指数関数という。（ようやく定義できた！）

<u>Thm</u> (i) $a\in\mathbb{R}$，$a>1$ のとき，$y=a^x$ は狭義の単調増加関数

(ii) $a\in\mathbb{R}$，$0<a<1$ のとき，$y=a^x$ は狭義の単調減少関数

である。

(☺) (i) について，

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha<\beta$ とする。有理数の稠密性 (p.100) により

$\alpha<\mu<\nu<\beta$ を満たすような $\mu,\nu\in\mathbb{Q}$ が存在する。

このとき，$a^\mu\in\{a^\xi \mid \xi\in\mathbb{Q},\ \xi>\alpha\}$ であり，

$$a^\alpha=\inf\{a^\xi \mid \xi\in\mathbb{Q},\ \xi>\alpha\}$$

であるから，　$a^\alpha\leqq a^\mu$

また，$^\forall a^\theta\in\{a^\eta \mid \eta\in\mathbb{Q},\ \eta>\beta\}$ とすると，$\theta\in\mathbb{Q}$ であり

$\nu<\beta<\theta$ であるから，　$a^\nu<a^\theta$

よって a^{ν} は $\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > \beta\}$ の下界である

すなわち、$a^{\beta} = \inf\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > \beta\}$ であるから

$a^{\nu} \leqq a^{\beta}$ が分かる。

$\mu, \nu \in \mathbb{Q}$ であるから、$a > 1$ より $a^{\mu} < a^{\nu}$ が成り立つので

$a^{\alpha} \leqq a^{\mu} < a^{\nu} \leqq a^{\beta}$ となり、$a^{\alpha} < a^{\beta}$.

よって、$y = a^{x}$ は狭義の単調増加関数である

(ii) について、

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ とする。有理数の稠密性により

$\alpha < \mu < \nu < \beta$ を満たすような $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$ が存在する。

このとき、$a^{\mu} \in \{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha\}$ であり

$a^{\alpha} = \sup\{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha\}$ であるから

$a^{\alpha} \geqq a^{\mu}$ となる。また、

$\forall a^{\theta} \in \{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > \beta\}$ とすると、$\theta \in \mathbb{Q}$ であり

$\nu < \beta < \theta$ であるから、$a^{\nu} > a^{\theta}$ となる。

よって、a^{ν} は $\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > \beta\}$ の上界である。つまり

$a^{\beta} = \sup\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q}, \eta > \beta\}$ であるから、

$a^{\nu} \geqq a^{\beta}$ が成立。$\mu, \nu \in \mathbb{Q}$ より、$a^{\mu} > a^{\nu}$ なので

$a^{\alpha} \geqq a^{\mu} > a^{\nu} \geqq a^{\beta}$ となり、$a^{\alpha} > a^{\beta}$。よって、狭義単調減少関数である。□

(注) $y=1^x$ は，定数値関数 $y\equiv 1$ なので，

狭義単調増加でも，狭義単調減少でもない。

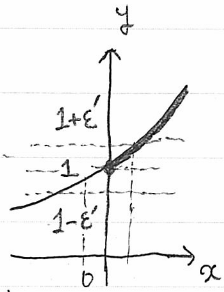
<u>Thm</u>　$y=a^x$ は $\mathbb{R}$ 上連続である。

(∵)　$a=1$ のときは，上の注より $y\equiv 1$ より連続である。

$\boxed{a>1 \text{ のとき}}$　$y=a^x$ が $x=0$ で連続であることを示そう。

$^\forall\varepsilon>0$ を取る。$\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$ とおく。つまり

$\varepsilon \geqq \varepsilon'$,　$1>\varepsilon'>0$ である。



ここで，$\inf\{a^\xi \mid \xi\in\mathbb{Q}, \xi>0\}=1$ なので，

$1+\varepsilon'$ は $\{a^\xi \mid \xi\in\mathbb{Q}, \xi>0\}$ の下界ではない。よって，

$^\exists\delta_1\in\mathbb{Q}$, $\delta_1>0$ s.t. $1\leq a^{\delta_1}<1+\varepsilon'$

また，$0<1-\varepsilon'<1$ であるから，$\dfrac{1}{1-\varepsilon'}>1$ となる。よって，

$\dfrac{1}{1-\varepsilon'}$ も $\{a^\xi \mid \xi\in\mathbb{Q}, \xi>0\}$ の下界ではない。従って，

$^\exists\delta_2\in\mathbb{Q}$, $\delta_2>0$ s.t. $1\leq a^{\delta_2}<\dfrac{1}{1-\varepsilon'}$

つまり，$1-\varepsilon'<\dfrac{1}{a^{\delta_2}}=a^{-\delta_2}$ であるような δ_2 が存在する。

$\delta_0 := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば，$\delta_0\leq\delta_1$ であるから，

$$a^{\delta_0}\leq a^{\delta_1}<1+\varepsilon'.$$

また，$\delta_0\leq\delta_2$ であるから，$a^{\delta_0}\leq a^{\delta_2} \iff \dfrac{1}{a^{\delta_2}}\leq\dfrac{1}{a^{\delta_0}}$

$\iff a^{-\delta_2}\leq a^{-\delta_0}$ より，$1-\varepsilon'<a^{-\delta_2}\leq a^{-\delta_0}$

ここで、$^{\forall}x \in \mathbb{R}$, $|x| < \delta_0$ とする。3パターンに場合分けする。

Case 1　$0 < x < \delta_0$ のとき

$1 < a^x < a^{\delta_0}$ であるから、

$1 < a^x < a^{\delta_0} < 1 + \varepsilon' \leqq 1 + \varepsilon$

よって、$|a^x - a^0| = |a^x - 1| = a^x - 1 < \varepsilon$,

Case 2　$x = 0$ のとき

$|a^x - a^0| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$

Case 3　$-\delta_0 < x < 0$ のとき

$a^{-\delta_0} < a^x < 1$ であるから

$1 - \varepsilon \leqq 1 - \varepsilon' < a^{-\delta_0} < a^x < 1$

よって、$|a^x - a^0| = |a^x - 1| = 1 - a^x < \varepsilon$

Case 1〜3 のどの場合についても、$^{\forall}x \in \mathbb{R}$ に対し、

$|x - 0| < \delta_0 \Rightarrow |a^x - a^0| < \varepsilon$

従って、$y = a^x$ は $x = 0$ で連続である。

次に、$x = x_0$ ($^{\forall}x_0 \in \mathbb{R}$) で連続であることを示す。

その前に、$a^\alpha > 0$ ($a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) であることを示しておく。

(∵) $\boxed{a = 1 \text{ のとき}}$ は、$1^\alpha = 1 > 0$ より明らか。

$\boxed{a > 1 \text{ のとき}}$　$a^\alpha \leqq 0$ となる実数 α が存在したと仮定すると、

$a^{\alpha} = \inf\{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > \alpha\} \leq 0$ となる.

ここで, $\alpha > \eta$ となる $\eta \in \mathbb{Q}$ を取る. すると, $a > 1$ より

${}^{\forall} a^{\xi} \in \{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q},\ \xi > \alpha\}$ に対して, $\xi > \alpha > \eta$ より

$a^{\xi} > a^{\eta}$ が成り立つ. すなわち, a^{η} は $\{a^{\xi} \mid \xi \in \mathbb{Q}, \xi > \alpha\}$

の下界となるので, $a^{\alpha} \geqq a^{\eta}$ となるが

$a^{\eta} \in \mathbb{Q}$ なので, $a^{\eta} > 0$ となり, $a^{\alpha} \leq 0$ であることに

矛盾. よって, $a^{\alpha} > 0$ である.

$\boxed{0 < a < 1 \text{ のとき}}$, $a^{\alpha} \leq 0$ となる実数 α が存在したと仮定

すると, $a^{\alpha} = \sup\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q},\ \eta > \alpha\} \leq 0$ となる.

ここで, $\eta > \alpha$ となる ${}^{\forall}\eta \in \mathbb{Q}$ を取ると, $a^{\eta} > 0$ となるので,

$\sup\{a^{\eta} \mid \eta \in \mathbb{Q},\ \eta > \alpha\} > 0$ となり, 矛盾. よって, $a^{\alpha} > 0$ である. □

(連続性に戻る)

${}^{\forall}\varepsilon > 0$ 取る. $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}$ とおくと, $a^{x_0} > 0$ より, $\varepsilon_0 > 0$.

この $\varepsilon_0 > 0$ に対し, $y = a^x$ は $x = 0$ で連続であるから,

${}^{\exists}\delta > 0$, s.t. ${}^{\forall}x \in \mathbb{R}$, $|x| < \delta \Rightarrow |a^{x} - 1| < \varepsilon_0$ …(※)

一方, ${}^{\forall}x \in \mathbb{R}$ に対し, $|a^{x} - a^{x_0}| = |a^{(x - x_0) + x_0} - a^{x_0}|$

$= |a^{x - x_0} \cdot a^{x_0} - a^{x_0}| = |(a^{x - x_0} - 1) a^{x_0}|$

$= |a^{x - x_0} - 1| \cdot |a^{x_0}| = |a^{x - x_0} - 1|\, a^{x_0}$

ここで, 上の(※)より, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |a^{x - x_0} - 1| < \varepsilon_0$ なので,

(注) $x - x_0 \in \mathbb{R}$ を, $x \in \mathbb{R}$ のところに代入.

$|x-x_0|<\delta$ ならば,

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x-x_0}-1|\cdot a^{x_0} < \varepsilon_0 \cdot a^{x_0} = \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} a^{x_0} = \varepsilon$$

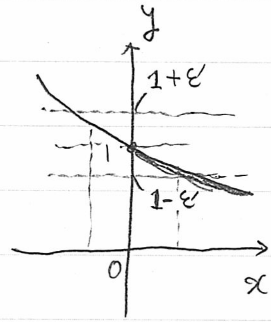
となり, $y=a^x$ は ${}^\forall x_0\in\mathbb{R}$ で連続となる。

$\boxed{0<a<1\text{ のとき}}$ $a>1$ のときと同様, $y=a^x$ が $x=0$ で連続であることを示せばよい。 ${}^\forall\varepsilon>0$, 取る。 $\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \frac{1}{2}\}$ とおく。

つまり
i.e., $\varepsilon\geqq\varepsilon'$, $1>\varepsilon'>0$ である.

ここで, $\sup\{a^\eta \mid \eta\in\mathbb{Q},\ \eta>0\}=1$ なので,

$1-\varepsilon'$ は $\{a^\eta \mid \eta\in\mathbb{Q},\ \eta>0\}$ の上界ではない。



よって, ${}^\exists\delta_1\in\mathbb{Q},\ \delta_1>0$ s.t. $1\geqq a^{\delta_1}>1-\varepsilon'$

また, $1+\varepsilon'>1$ であるから, $1>\frac{1}{1+\varepsilon'}$ となる。よって

$\frac{1}{1+\varepsilon'}$ も $\{a^\eta \mid \eta\in\mathbb{Q},\ \eta>0\}$ の上界ではない。よって

${}^\exists\delta_2\in\mathbb{Q},\ \delta_2>0$ s.t. $1\geqq a^{\delta_2}>\frac{1}{1+\varepsilon'}$

つまり, $1+\varepsilon' > \frac{1}{a^{\delta_2}} = a^{-\delta_2}$ であるような δ_2 が存在する.

$\delta_0 := \min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおけば, $\delta_0\leqq\delta_1$ であるから

$$a^{\delta_0}\geqq a^{\delta_1}>1-\varepsilon'.$$

また $\delta_0\leqq\delta_2$ であるから $a^{\delta_0}\geqq a^{\delta_2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{\delta_2}}\geqq\frac{1}{a^{\delta_0}} \Leftrightarrow a^{-\delta_2}\geqq a^{-\delta_0}$ より

$$1+\varepsilon' > a^{-\delta_2}\geqq a^{-\delta_0}.$$

ここで、$\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \delta_0$ として、3パターンに場合分けする

<u>Case 1.</u> $0 < x < \delta_0$ のとき

$1 > a^x > a^{\delta_0}$ であるから

$1 > a^x > a^{\delta_0} \geqq a^{\delta_1} > 1 - \varepsilon' \geqq 1 - \varepsilon$

よって $|a^x - a^0| = |a^x - 1| = 1 - a^x < \varepsilon$

<u>Case 2</u> $x = 0$ のとき

$|a^x - a^0| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$

<u>Case 3</u> $-\delta_0 < x < 0$ のとき

$a^{-\delta_0} > a^x > 1$ であるから

$1 + \varepsilon \geqq 1 + \varepsilon' > a^{-\delta_2} \geqq a^{-\delta_0} > a^x > 1$

よって $|a^x - a^0| = |a^x - 1| = a^x - 1 < \varepsilon$.

よって Case 1 ~ 3 のどの場合でも $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し

$|x - 0| < \delta_0 \Rightarrow |a^x - a^0| < \varepsilon$.

従って $y = a^x$ は $x = 0$ で連続である。

次に、$x = x_0$ ($\forall x_0 \in \mathbb{R}$) で連続であることを示す。

$\forall \varepsilon > 0$, 取る。 $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{a^{x_0}}$ とおくと、$a^{x_0} > 0$ より、$\varepsilon_0 > 0$

この $\varepsilon_0 > 0$ に対し、$y = a^x$ は $x = 0$ で連続であるから

$\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon_0$ …(*)

一方、$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{(x-x_0)+x_0} - a^{x_0}| = |(a^{x-x_0}-1)a^{x_0}|$$

$$= |a^{x-x_0}-1|\cdot|a^{x_0}| = |a^{x-x_0}-1|\cdot a^{x_0}$$

ここで、上の(*)より、$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |a^{x-x_0}-1|<\varepsilon_0$ なので

$|x-x_0|<\delta$ ならば

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x-x_0}-1|\cdot a^{x_0} < \varepsilon_0 \cdot a^{x_0} = \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\cdot a^{x_0} = \varepsilon$$

となり、$y=a^x$ は $^\forall x_0 \in \mathbb{R}$ で連続である。

○ 指数法則

少し、準備が必要となるので、次の補題(Lemma)を示しておく。

Lemma　$^\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して、次のような数列 $\{\alpha_n\}$ が存在する。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$

(ii) $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$

(∵) $\mathbb{R}$ における有理数の稠密性により $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha < \beta < \alpha + \frac{1}{n} \quad (\beta \in \mathbb{Q})$$

であるような $\beta \in \mathbb{Q}$ が存在する。その1つを α_n とおく。

そうすると、$\alpha_n \in \mathbb{Q}$ なので $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$

$^\forall \varepsilon > 0$ を任意に取ると、アルキメデスの原理により

$n_0 \varepsilon > 1$ であるような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。

もちろん $\varepsilon > \dfrac{1}{n_0}$ なので、$^\forall n \in \mathbb{N}$, $n_0 \le n$ ならば、

$$|\alpha_n - \alpha| = \alpha_n - \alpha < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

ゆえに, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. □

(注) 数列 $\{\alpha_n\}$ の定義の仕方については, 実は少しあいまいなところがある. 実は

$\alpha < \beta < \alpha + \frac{1}{n}$ を満たす $\beta \in \mathbb{Q}$ は無数に存在し,

そのどれを選んで α_n とするのかが明確でないからである.
ここも正式にすると, 実は"選択公理"が使える.

まず, 集合 M の部分集合 A $(A \subset M)$ の全体は

集合を要素に持つ集合となる。これを, M の巾(べき)集合 (power set)

といい, $\mathfrak{P}(M)$ で表す。すなわち, $\mathfrak{P}(M) = \{A \mid A \subset M\}$

($\mathfrak{P}$ は P である)

((ex) $M = \{1, 2\}$ のとき, $\mathfrak{P}(M) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ である.)

[$\boxed{\text{選択公理}}$ M は集合で, $M \neq \phi$ とする.
これに対し, 写像 $\varphi_M : \mathfrak{P}(M)\setminus\{\phi\} \to M$ で,

$$\varphi_M(A) \in A \quad (A \in \mathfrak{P}(M)\setminus\{\phi\})$$

となるものが唯一つ定まる.]

φ_M は, M の選択関数と呼ばれる. つまり, M の空でない部分集合 $A \subset M$ から, その元 $\varphi_M(A) \in A$ が唯一つだけ選び出されることになる.

さて、$\mathbb{R}$の選択関数 $\varphi_{\mathbb{R}}$ を用いて、$(\alpha, \alpha+\frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ より

次のようにおく。

$$\alpha_n = \varphi_{\mathbb{R}}((\alpha, \alpha+\tfrac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

すると、この α_n は $\alpha_n \in (\alpha, \alpha+\frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}$ であるから

$\alpha < \alpha_n < \alpha + \frac{1}{n}$, $\alpha_n \in \mathbb{Q}$ を満たす。そして、α_n の定め方は

選択関数が唯一つ定まるので、あいまいさもない。

準備が終わったので いよいよ 指数法則の証明に入ろう。

<u>Thm</u> $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば、

$$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$$

(😊) $\beta \in \mathbb{Q}$ の場合を考えよう。上の Lemma より、$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ となる

数列 $\{\alpha_n\}$ が存在する。$y = a^x$ は $x = \alpha$ で連続なので、

点列連続性から

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = a^{\alpha}$$

ここで、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$a^{\alpha_n} > 0$、また、$a^{\alpha} > 0$ であるから、

$y = x^{\beta}$ $(\beta \in \mathbb{Q})$ が連続であるから

$$\lim_{n\to\infty} (a^{\alpha_n})^{\beta} = (a^{\alpha})^{\beta},$$

また、$\alpha_n \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{Q}$ より、$(a^{\alpha_n})^{\beta} = a^{\alpha_n \beta}$ であり

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \beta = \alpha\beta$. よって $y = a^x$ が $x = \alpha\beta$ で連続である

から，点列連続性より

$$\lim_{n\to\infty}(a^{\alpha_n})^{\beta}=\lim_{n\to\infty}a^{\alpha_n\beta}=a^{\alpha\beta}$$

よって $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$ $(\beta\in\mathbb{Q})$

次に，$\beta\in\mathbb{R}$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta$, $\{\beta_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{Q}$ となる

数列 $\{\beta_n\}$ を取ると，$y=(a^{\alpha})^{x}$ が $x=\beta$ で連続なので

$$\lim_{n\to\infty}(a^{\alpha})^{\beta_n}=(a^{\alpha})^{\beta}$$

一方，$\lim_{n\to\infty}\alpha\beta_n=\alpha\beta$，であり $\beta_n\in\mathbb{Q}$ なので，上の証明から

$(a^{\alpha})^{\beta_n}=a^{\alpha\beta_n}$ となる。よって $y=a^{x}$ が $x=\alpha\beta$ で

連続なので，

$$\lim_{n\to\infty}(a^{\alpha})^{\beta_n}=\lim_{n\to\infty}a^{\alpha\beta_n}=a^{\alpha\beta}$$

以上から $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$ □

<u>Thm</u> $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ ならば

$$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$$

(∵) <u>Lemma</u> より $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$, $\{\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{Q}$ となる

数列 $\{\alpha_n\}$ が取れる．指数関数 $y=(ab)^{x}$ が連続であるから，

$$\lim_{n\to\infty}(ab)^{\alpha_n}=(ab)^{\alpha}$$

また，$y=a^x$，$y=b^x$ も連続であるから

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = a^\alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b^{\alpha_n} = b^\alpha$$

また．$\alpha_n \in \mathbb{Q}$ $(n\in\mathbb{N})$ であるから

$$(ab)^{\alpha_n} = a^{\alpha_n} b^{\alpha_n}$$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty} (ab)^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}\cdot b^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}\cdot \lim_{n\to\infty} b^{\alpha_n}$$

$$= a^\alpha b^\alpha$$

よって．$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ となる． □

<u>Thm</u> $a, b\in\mathbb{R}$，$a>0$，$b>0$，$\alpha\in\mathbb{R}$ のとき

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

(☺) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = (ab^{-1})^\alpha = a^\alpha\cdot(b^{-1})^\alpha = a^\alpha b^{(-1)\alpha}$

$$= a^\alpha\cdot b^{-\alpha} = a^\alpha\cdot(b^\alpha)^{-1} = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$ □

<u>Thm</u> $a\in\mathbb{R}$，$a>0$，$a\neq 1$ のとき，$y=a^x$ の値域は $(0,+\infty)$ である．

(☺) $y=a^x$ は $\mathbb{R}$ 上連続なので，その値域は区間となる．(p.120)

それを I とする。つまり，$I=\{a^x \mid x\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{1^\circ.\ a>1 \text{ のとき}}$

${}^\forall x \in \mathbb{R}$, $a^x > 0$ より, $I \subset (0, +\infty)$ である.

逆に, ${}^\forall d \in (0, +\infty)$ を取る.

$a = 1 + h \ (h > 0)$ とおけば, $a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \cdots + {}_nC_n h^n > nh$

より $a^n > nh$. アルキメデスの原理より $nh > d$ となる $n \in \mathbb{N}$ が

存在する. よって, $a^n > d$ であるような $n \in \mathbb{N}$ が取れる.

同じ理由で, $a^m > \dfrac{1}{d} \iff d > a^{-m}$ となる $m \in \mathbb{N}$ も

とれる. $a^n, a^{-m} \in I$ であり, $a^{-m} < d < a^n$ なので

$d \in I$ となり, $(0, +\infty) \subset I$

$\therefore$ $I = (0, +\infty)$ となる.

2°. $\boxed{0 < a < 1 \text{ のとき,}}$

${}^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $a^x > 0$ であるから, $I \subset (0, +\infty)$

${}^\forall d \in (0, +\infty)$ を取る. $\tilde{a} = \dfrac{1}{a}$ とおくと, $0 < a < 1$ より $1 < \dfrac{1}{a} = \tilde{a}$

$$a = (a^{-1})^{-1} = \tilde{a}^{-1} = \frac{1}{\tilde{a}}$$

$$\therefore \ a^x = \left(\frac{1}{\tilde{a}}\right)^x = \frac{1^x}{(\tilde{a})^x} = \frac{1}{\tilde{a}^x}$$

$y = \tilde{a}^x$ は, $\tilde{a} > 1$ より, 値域が $(0, +\infty)$ である.

よって, $0 < \dfrac{1}{d} = \tilde{a}^{h}$ を満たす $h \in \mathbb{R}$ が存在する.

これから, $d = \dfrac{1}{\tilde{a}^h} = \dfrac{1^h}{\tilde{a}^h} = \left(\dfrac{1}{\tilde{a}}\right)^h = a^h$ となり, $d \in I$

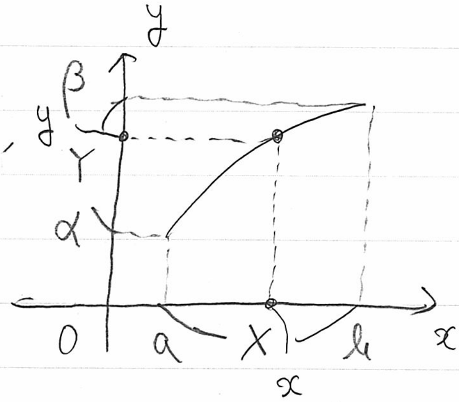
$\therefore$ $(0, +\infty) \subset I$ となり, $I = (0, +\infty)$ $\square$

(注) $y = 1^x$ は, $y = 1$ なので, 値域は $\{1\}$ となる.

○ 逆関数

$X\subset\mathbb{R}$, $Y\subset\mathbb{R}$, 区間とする。

$f: X\to\mathbb{R}$ を、X 上の連続な狭義単調増加関数とする。



このとき、p.122 の定理より、
$f(X)$ もまた区間となる。ここで、
$f(X)=Y$ とおくと、$f: X\to Y$ は全射
となる。つまり、$\forall y\in Y$ に対して、
$^\exists x\in X$ s.t. $y=f(x)$ となる。更に、ここで存在する $x\in X$ は
唯一つである。何故ならば $x_1, x_2\in X$ で、$x_1\neq x_2$ とする。
$x_1<x_2$ として一般性を失わない。また、この x_1, x_2 は $y=f(x_1)=f(x_2)$
を満たすが、f が X 上狭義単調増加関数なので、$x_1<x_2$
$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ となる。これは矛盾であり、$x_1=x_2$ なので x は
唯一つである。

このようにして、$\forall y\in Y$ に対して、唯1つの $x\in X$ を対応させる
ことが出来た。これを関数として捉えれば、関数 $x=\varphi(y)$
が得られる。この関数 $\varphi: Y\to X$ を、$y=f(x)$ の
逆関数 (inverse function) といい、$x=f^{-1}(y)$ という
記号で表わす。つまり、$\varphi(y)=f^{-1}(y)$ と書くのである。

P.141のグラフからも見て取れるが，

$y=f(x)$ に対して，$x=f^{-1}(y)$ なので $\forall x\in X$ に対して，

$$x=f^{-1}(y) \Leftrightarrow x=f^{-1}(f(x))$$

が成り立つ。また，$\forall y\in Y$ に対しても，$x=f^{-1}(y)$ に対して，$y=f(x)$ なので，

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=f(f^{-1}(y))$$ が成り立つ。

prop $f: X\to Y$ は X 上で連続な狭義単調増加関数とする。

このとき，$f^{-1}: Y\to X$ は Y 上で連続な狭義単調増加関数となる。

($\because$) (狭義単調増加であること)

背理法で示す。仮に狭義単調増加でないとすると，

$\exists y_1, y_2\in Y$, s.t. $y_1<y_2$, $f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)$

このとき，$x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$ とすると，$x_1\geq x_2$.

一方で，f は X 上狭義単調増加であるから，$f(x_1)\geq f(x_2)$

$f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$ であるから，$y_1\geq y_2$ となり，矛盾。

(連続性について)

Y の端点でない任意の $y^*\in Y$ を取り，$f^{-1}(y^*)=x^*$ とおく。

$\forall\varepsilon>0$ を取る。$x^*-\varepsilon$, $x^*+\varepsilon\in X$ となるように

十分 ε を小さくすれば，$f(x^*-\varepsilon)=y_\varepsilon^-$, $f(x^*+\varepsilon)=y_\varepsilon^+$ となる

y_ε^-, $y_\varepsilon^+\in Y$ が取れる。f が X 上狭義単調増加なので，

$f(x^*-\varepsilon) < f(x^*) < f(x^*+\varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ $y_\varepsilon^- < y^* < y_\varepsilon^+$ となる。

$\delta := \frac{1}{2} \min\{y^*-y_\varepsilon^-, y_\varepsilon^+-y^*\} > 0$ とする。このとき、

$(y^*-\delta, y^*+\delta) \subset (y_\varepsilon^-, y_\varepsilon^+)$ となり、更に $f^{-1}(y)$ は

Y上で狭義単調増加なので、

$f^{-1}(y_\varepsilon^-) \leqslant f^{-1}(y^*-\delta) < f^{-1}(y^*) < f^{-1}(y^*+\delta) < f^{-1}(y_\varepsilon^+)$.

つまり、$f^{-1}((y^*-\delta, y^*+\delta)) \subset (x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon)$

$\quad$ $\sqsubseteq: \{f^{-1}(y) \mid {}^\forall y \in (y^*-\delta, y^*+\delta)\}$

${}^\forall y \in Y,\quad 0 \leqslant |y-y^*| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y)-x^*| < \varepsilon$

となり、$f^{-1}(y)$ は Y の端点でない点 y^* で連続。

次に、Yが下に有界で、更に $\alpha := \inf Y \in Y$ であったと仮定しよう。

つまり、Yは閉区間、半閉区間などの状況を考える。

区間の端点で関数の連続性をどう定義したか思い出すと、

$X := [a, b]$ のとき、$f: X \to \mathbb{R}$ が X 上連続

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {}^\forall x_0 \in (a, b) \text{ のとき}, & \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ a \in [a, b] \text{ のとき}, & \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \\ b \in [a, b] \text{ のとき}, & \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b) \end{cases}$$

であった。今、$a := f^{-1}(\alpha) \in X$ とおく。

$^\forall\varepsilon>0$ を取る。 $a+\varepsilon\in X$ となるように十分 ε を小さく取れば、fが X上 狭義単調増加関数となるので

$$f(a)<f(a+\varepsilon) \iff \alpha<y_\varepsilon^+(=f(a+\varepsilon))$$ となる。

$\delta:=\frac{1}{2}(y_\varepsilon^+-\alpha)$ とおくと、

$(\alpha,\alpha+\delta)\subset(\alpha,y_\varepsilon^+)$ となり、再に $f^{-1}(y)$ は

Y上で狭義単調増加なので、

$$a=f^{-1}(\alpha)<f^{-1}(\alpha+\delta)<f^{-1}(y_\varepsilon^+)=a+\varepsilon$$

つまり、$f^{-1}((\alpha,\alpha+\delta))\subset(a,a+\varepsilon)$ となるので

$$^\forall y\in Y,\quad 0\leq y-\alpha<\delta\Rightarrow|f^{-1}(y)-a|<\varepsilon$$

となり、$f^{-1}(y)$ は $y^*=\alpha=\inf Y\in Y$ でも連続。

次に、Yが上に有界でかつ、$\beta:=\sup Y\in Y$ であったとしよう。また、$b:=f^{-1}(\beta)\in X$とする。

$y^*=\beta$ のとき、 $f^{-1}(\beta)=b$ となる。$^\forall\varepsilon>0$ を取る。$b-\varepsilon\in X$となるように、εを十分小さく取れば、fがX上狭義単調増加なので

$$f(b-\varepsilon)<f(b)\iff y_\varepsilon^-<\beta\quad(y_\varepsilon^+=f(b-\varepsilon))$$ となる。

$\delta:=\frac{1}{2}(\beta-y_\varepsilon^-)>0$ とおくと、

$(\beta-\delta,\beta)\subset(y_\varepsilon^-,\beta)$ となり、再に $f^{-1}(y)$は

Y上で狭義単調増加なので

$$b-\varepsilon=f^{-1}(y_\varepsilon^-)<f^{-1}(\beta-\delta)<f^{-1}(\beta)=b$$

つまり、$f^{-1}((\beta-\delta,\beta))\subset(b-\varepsilon,b)$ となるので、

$^\forall y\in Y,\quad 0\leq\beta-y<\delta\Rightarrow|f^{-1}(y)-b|<\varepsilon$ となり、$f^{-1}(y)$は

$y=\beta$ でも連続。 □

◦対数関数

$a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$のときの指数関数の逆関数を

$$y=\log_a x$$

と書き、aを底とする対数関数という。

これまでの定理から、$y=a^x$が$\mathbb{R}$上連続なので、$y=\log_a x$も連続であり、$y=a^x$の値域が$(0,+\infty)$なので、

$y=\log_a x$の定義域は$(0,+\infty)$となり、値域は$\mathbb{R}$である。

$a>1$のとき、$y=a^x$は狭義単調増加なので、
　　$y=\log_a x$も狭義単調増加関数

$0<a<1$のとき、$y=a^x$は狭義単調減少なので、
　　$y=\log_a x$も狭義単調減少関数である。

以下の公式は、数学IIで証明済みである。

<u>Thm</u>　$a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$のとき、$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

<u>Thm</u>　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
　　　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　$\left(\begin{array}{l} a\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1, \\ M, N\in\mathbb{R},\ M>0, N>0 \end{array}\right)$

<u>Thm</u>　$\log_b c=\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$　$\left(\begin{array}{l} a, b, c\in\mathbb{R},\ a>0, b>0, c>0, \\ a\neq 1,\ b\neq 1 \end{array}\right)$

<u>Thm</u>　$\log_a b^c=c\log_a b$　$\left(a, b, c\in\mathbb{R},\ a, b>0,\ a\neq 1\right)$

対数関数のこれらの性質によって，実は $y=x^\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ の性質を確めることが出来る。

<u>Thm</u> $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ ならば，$(0,+\infty)$ 上定義された関数 $y=x^\alpha$ は狭義単調増加関数である。

(☺) $a\in\mathbb{R}$, $a>1$ であるような $^\forall a\in\mathbb{R}$ に対し，

$a^\alpha = b$ とおくと，$b>1$ である。

ところで，$x = a^{\log_a x}$ $(^\forall x\in(0,+\infty))$ より，

この x に $x^\alpha\in(0,+\infty)$ を代入すると，

$$x^\alpha = a^{\log_a x^\alpha} = a^{\alpha\log_a x}$$
$$= (a^\alpha)^{\log_a x} = b^{\log_a x}$$

ここで，$0<c<d$ であるような $c, d\in\mathbb{R}$ を取れば，

$y=\log_a x$ は $a>1$ より $\log_a c < \log_a d$ となる。

$y=b^x$ も，$b>1$ より単調増加なので

$$b^{\log_a c} < b^{\log_a d}$$

すなわち，$c^\alpha = b^{\log_a c}$, $d^\alpha = b^{\log_a d}$ より

$c^\alpha < d^\alpha$ となる。よって，$y=x^\alpha$ は狭義の単調増加関数である。□

Thm $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$ ならば, $(0, +\infty)$ 上定義された

関数 $y = x^{\alpha}$ は狭義単調減少関数である.

(∵) $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ であるような $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対し,

$$a^{\alpha} = b \text{ とおくと}, \quad b > 1 \text{ である.}$$

ところで, $x = a^{\log_a x}$ $(\forall x \in (0, +\infty))$ より

この x に x^{α} を代入すると,

$$x^{\alpha} = a^{\log_a x^{\alpha}} = a^{\alpha \log_a x} = (a^{\alpha})^{\log_a x}$$

$$= b^{\log_a x}$$

ここで, $0 < c < d$ であるような $c, d \in \mathbb{R}$ を取れば,

$y = \log_a x$ は $0 < a < 1$ より, $\log_a c > \log_a d$ となる.

$y = b^x$ は $b > 1$ より単調増加なので

$$b^{\log_a d} < b^{\log_a c}$$

ここで, $c^{\alpha} = b^{\log_a c}$, $d^{\alpha} = b^{\log_a d}$ より

$d^{\alpha} < c^{\alpha}$ となる. よって $y = x^{\alpha}$ は狭義の

単調減少関数である. □

(注) $\alpha = 0$ なら, $y = x^{\alpha} = x^0 \equiv 1$ となる.

最後に，$y=x^\alpha$ の連続性を示そう．

__Thm__ $\alpha\in\mathbb{R}$ ならば，$(0,+\infty)$ 上定義された関数

$y=x^\alpha$ は連続である．

(∵) $\boxed{\alpha>0\text{ のとき}}$ $a\in\mathbb{R}$，$a>1$ であるような $a\in\mathbb{R}$ に対し，

$a^\alpha=b$ とおくと，$b>1$ である．

$\forall x\in(0,+\infty)$ に対し，$x=a^{\log_a x}$ なので

$x^\alpha\in(0,+\infty)$ を代入すれば

$$x^\alpha=a^{\log_a x^\alpha}=a^{\alpha\log_a x}$$
$$=(a^\alpha)^{\log_a x}=b^{\log_a x}$$

より $x^\alpha=b^{\log_a x}$ と書ける．

ここで $f(x)=\log_a x$，$g(x)=b^x$ とおけば

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$，$g:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ であり

f,g 共に連続なので，$g\circ f(x)=g(f(x))$ も連続。

よって $g(f(x))=b^{\log_a x}=x^\alpha$

より，これは $y=x^\alpha$ が $(0,+\infty)$ で連続であることに

他ならない．

$\boxed{\alpha=0\text{ のとき}}$ $y=x^0\equiv1$ より，連続．(注)($x\in\mathbb{R}$ でよい。)

$\boxed{\alpha < 0 \text{ のとき,}}$ $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ であるような $a \in \mathbb{R}$ に対し,

$a^{\alpha} = b$ とおくと, $b > 1$ である.

$\alpha > 0$ のときと同様にして,

$x^{\alpha} = b^{\log_a x}$ と書ける.

同様に $f(x) = \log_a x$, $g(x) = b^x$ とおくと f, g 共に連続なので

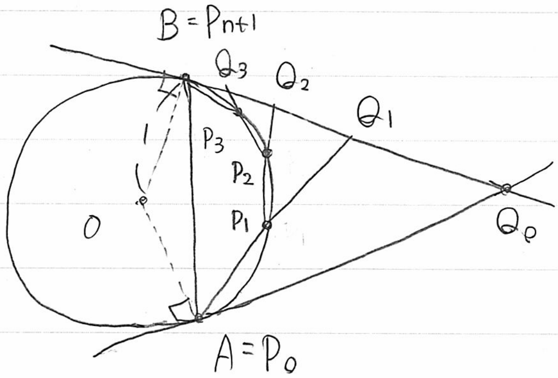
やはり $g(f(x)) = b^{\log_a x} = x^{\alpha}$ も連続である. □

◦ 三角関数

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を定義しよう。だが、その前に

θは半径1の円弧の長さで定義される。(ラジアン)

◦ 円弧の長さ



中心を原点Oとする半径1の円Oを考える。このとき、中心Oからの距離が1の点(x,y)は三平方の定理から、$\sqrt{x^2+y^2}=1$を満たす。すなわち、

$\sqrt{x^2+y^2}>0$, $1>0$ より

$$\sqrt{x^2+y^2}=1 \iff x^2+y^2=1^2 \iff x^2+y^2=1.$$

<u>Def</u> 座標平面上の点(x,y)の集合Cを

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$$

とする。Cを単位円と呼ぶ。

C上の点A, Bを取る。このとき、$AB \leqq 2$となる。

今、$AB<2$となるようにA, B $\in C$を取る。

<u>Def</u> ABを結ぶC上の点全体を$\overset{\frown}{AB}\subset C$と書き、円弧$\overset{\frown}{AB}$と呼ぶ。

$\overset{\frown}{AB}$上に、上図のように順次に有限個の点

$$A=P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}=B, \{P_k \mid 1\leq k\leq n+1, k\in\mathbb{N}\}\subset\overset{\frown}{AB}$$

を取り, 線分 P_0P_1, P_1P_2, …, P_nP_{n+1} を作り,

円弧 $\overset{\frown}{AB}$ に内接する多辺形 $\Pi : P_0P_1 \cdots P_{n+1}$ を作る.

この内接多辺形 Π の長さ L は

$$L = P_0P_1 + P_1P_2 + \cdots + P_nP_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} P_kP_{k+1}$$

で与えられる.

さて, 点 A, B での接線を引き, その交点を Q_0 とする.

Thm $\quad L = \sum_{k=0}^{n} P_kP_{k+1} < AQ_0 + BQ_0$

(☺) 前ページの図のように,

半直線 P_kP_{k+1} と直線 BQ_0 の交点を Q_{k+1} とする.

このとき, 図からも
$$P_0P_1 + P_1Q_1 < P_0Q_0 + Q_0Q_1$$
$$P_1P_2 + P_2Q_2 < P_1Q_1 + Q_1Q_2$$
$$P_2P_3 + P_3Q_3 < P_2Q_2 + Q_2Q_3$$
$$\vdots$$
$$P_{n-1}P_n + P_nQ_n < P_{n-1}Q_{n-1} + Q_{n-1}Q_n$$
$$P_nP_{n+1} < P_nQ_n + Q_nP_{n+1}$$

辺々を足し合わせると,

$$\sum_{k=0}^{n} P_kP_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} P_kQ_k < P_0Q_0 + \sum_{k=1}^{n} P_kQ_k + \sum_{k=0}^{n-1} Q_kQ_{k+1} + Q_nP_{n+1}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} P_kP_{k+1} < P_0Q_0 + \sum_{k=0}^{n-1} Q_kQ_{k+1} + Q_nP_{n+1}$$

$$= P_0Q_0 + Q_0P_{n+1}$$

$A = P_0$, $B = P_{n+1}$ より

$$L = \sum_{k=0}^{n} P_kP_{k+1} < AQ_0 + BQ_0 \quad \square$$

よって. $\mathcal{L}_{AB} := \left\{ L \mid L = \sum_{k=0}^{n} P_kP_{k+1},\ P_k \in \widehat{AB},\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$

とすると，$\forall L \in \mathcal{L}_{AB}$ に対して，$L < AQ_0 + BQ_0$ が成り立つので

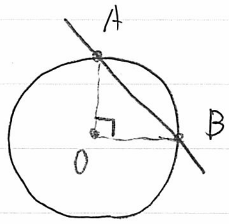
$AQ_0 + BQ_0$ は $\mathcal{L}_{AB}$ の上界である．よって，実数の連続性公理より

$\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ s.t. $\theta = \sup \mathcal{L}_{AB}$ とする．

<u>Def</u> $A, B \in C$, $AB < 2$ に対し，$\angle AOB = \theta$ で角を定める。

(これを弧度法という.)

<u>Def</u> $A, B \in C$, $AB = \sqrt{2}$ とする。



$\theta = \sup \mathcal{L}_{AB}$ のとき，

$\pi := 2\theta$ と定義する。

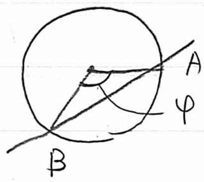
このことから，$AB = 2$ のとき，$\theta = \pi$ であり，C の周の長さ

(円周) は 2π であることが分かる．

なお，$\pi < \theta < 2\pi$ の θ は，右図のように AB を定めて，

$\varphi = \sup \mathcal{L}_{AB}$ を用いて，

$\theta = 2\pi - \varphi$ とすればよい。



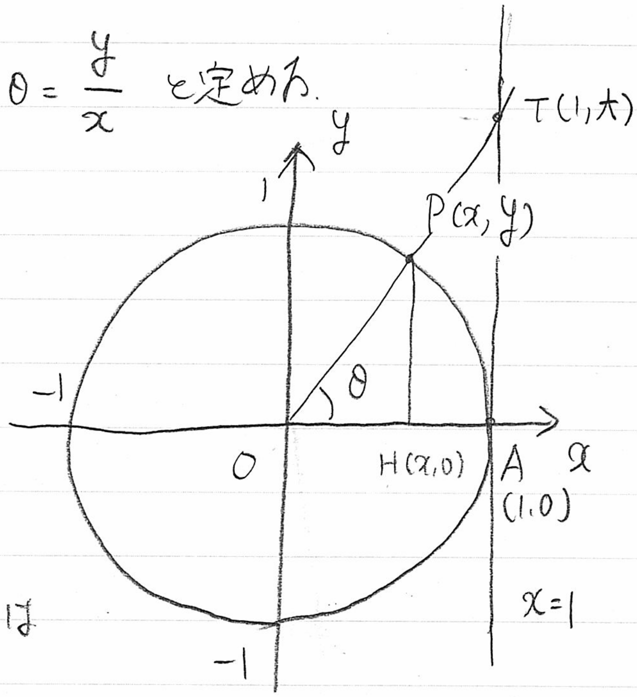
数学II と同様に θ を一般角に拡張しておく。

○ 正弦・余弦・正接関数の定義

$C := \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ 上の点 $P(x,y)$, $A(1,0)$ に対し

$\angle AOP = \theta = \sup \measuredangle_{AP}$ とおくとき

$\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ と定める.



$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = 1$

より, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ なので,

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

また $x=0$ となる $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ では

$\tan\theta$ は定義されない。

Thm　$\tan\theta$ の値域は $\mathbb{R}$ である

(☺) $\forall t \in \mathbb{R}, t > 0$, 取る。$f_t : [0,1] \to [0,1]$

$$\begin{array}{ccc} \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

f_t は, これまでの定理より $[0,1]$ 上連続であり,

$g(x) = 1-x^2$ が $[0,1]$ で狭義単調減少,

$h(x) = \sqrt{x}$ が $[0,+\infty)$ で狭義単調増加なので

$f_t(x) = h \circ g(x) = \sqrt{1-x^2}$ は $[0,1]$ で狭義単調減少関数となる

$l(x) = tx$ とおく。このとき,

$f_+(x) - l(x) := \varphi(x)$ は $[0,1]$ 上連続であり

$\varphi(0) = f_+(0) - l(0) = 1,\quad \varphi(1) = f(1)_+ - l(1) = -t < 0$

であるから、$\varphi(0)\varphi(1) < 0$ となり、中間値の定理から

$\exists x^* \in (0,1)$ s.t. $\varphi(x^*) = 0$.

$y^* = \sqrt{1-(x^*)^2}$ とすると、$(x^*)^2 + (y^*)^2 = 1$ より

$(x^*, y^*) \in C$ となる $P(x^*, y^*)$、$H(x^*, 0)$ とおく。

$\angle AOP = \theta^* = \sup L_{AP}$ とするとき、$0 < \theta^* < \frac{\pi}{2}$ であり、

$\tan\theta^* = \dfrac{y^*}{x^*}$、一方、$\varphi(x^*) = 0$ より

$$\sqrt{1-(x^*)^2} - t x^* = 0 \iff 1-(x^*)^2 = t^2(x^*)^2$$

$$\iff \frac{1}{1+t^2} = (x^*)^2 \iff x^* = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad (\because x^* > 0)$$

$$y^* = \sqrt{1-(x^*)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}} = \sqrt{\frac{1+t^2-1}{1+t^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}} = \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad (\because t > 0)$$

すると、$y^* = t x^*$ となるので、$t = \dfrac{y^*}{x^*}$

よって、$t = \tan\theta^*$ となる $\theta^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ が存在する。

従って、$(0, +\infty) \subset I := \{ \tan\theta \mid \theta \in \mathbb{R},\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\ (n \in \mathbb{Z}) \}$

また，$t=0$ のとき，$\tan 0 = \dfrac{0}{1} = 0$ より $0 \in I$.

$t<0$ のとき，
$$\begin{array}{cccc} f_-: & [0,1] & \to & [-1,0] \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & -\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

$f_- = -f_+$ であるから，$[0,1]$ 上で連続な狭義単調増加関数となる。$l(x) = tx$ に対し

$f_-(x) - l(x) =: \psi(x)$ は $[0,1]$ 上連続であり

$\psi(0) = f_-(0) - l(0) = -1$，$\psi(1) = f_-(1) - l(1) = -t > 0$

であるから $\psi(0)\psi(1) < 0$ となり 中間値の定理から

$^\exists x^* \in (0,1)$. s.t. $\psi(x^*) = 0$.

$y^* = -\sqrt{1-(x^*)^2}$ とすると，$(x^*)^2 + (y^*)^2 = 1$ より

$(x^*, y^*) \in C$ となる。$P(x^*, y^*)$，$H(x^*, 0)$ とおく。

$\angle AOP = \theta^* = -\sup L_{AP}$ とするとき，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta^* < 0$

であり，$\tan\theta^* = \dfrac{y^*}{x^*}$. 一方，$\psi(x^*) = 0$ より

$-\sqrt{1-(x^*)^2} - tx^* = 0 \iff x^* = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $(\because x^* > 0)$

$y^* = -\sqrt{1-(x^*)^2} = -\dfrac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{-(-t)}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

よって，$y^* = tx^*$ であるから，$t = \dfrac{y^*}{x^*}$

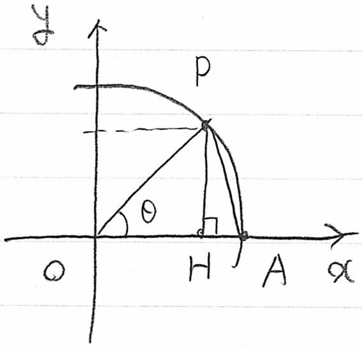
従って，$t = \tan\theta^*$ となる $\theta^* \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ が存在するので

$(-\infty, 0) \subset I$ となり，$\mathbb{R} \subset I \iff I = \mathbb{R}$ である。$\square$

Thm $\sin\theta$ は $\mathbb{R}$ 上連続な関数である。

(☺) $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \in \mathbb{R}$) における連続性を示す

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、



$$AP^2 = HA^2 + HP^2 > HP^2$$

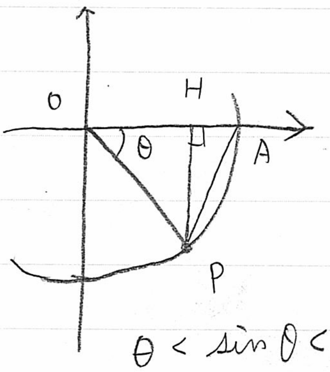
$$\therefore\ AP^2 > HP^2 \iff AP > HP$$

より、$HP < AP \leq \sup \mathcal{L}_{AP} = \theta$

一方、$HP = \sin\theta$ より

$0 < \sin\theta < \theta$ である。

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき



$$AP^2 = HA^2 + HP^2 > HP^2$$

同様に、$HP < AP \leq \sup \mathcal{L}_{AP}$

ここで、$\sin\theta = -HP$, $\theta = -\sup \mathcal{L}_{AP}$ より

$\theta < \sin\theta < 0$ である。よって、$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $|\sin\theta| < |\theta|$ が成り立つ。

$\forall \varepsilon > 0$、取る。$^\exists \delta := \min\left\{\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right\}$ とすると、$\frac{\pi}{2} \geq \delta > 0$ かつ $\varepsilon \geq \delta > 0$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\theta - \theta_0| < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ とすると、

$$|\sin\theta - \sin\theta_0|$$
$$= \left|\sin\left\{\frac{1}{2}(\theta+\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\} - \sin\left\{\frac{1}{2}(\theta+\theta_0) - \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\}\right|$$

$$= \left| \sin\left\{\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)\right\} \cos\left\{\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\} + \cos\left\{\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)\right\} \cdot \sin\left\{\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\} \right.$$
$$\left. - \sin\left\{\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)\right\} \cos\left\{\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\} + \cos\left\{\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)\right\} \cdot \sin\left\{\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\} \right|$$

$$= \left| 2\cos\left\{\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)\right\} \cdot \sin\left\{\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\} \right|$$

$$\leqq \left| 2\sin\left\{\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right\} \right| < 2\left|\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)\right| = |\theta-\theta_0| < \delta \leq \varepsilon.$$

よって $\sin\theta$ は $\mathbb{R}$ 上連続である. □

なお, $\cos\theta = \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ であるから,

$\cos\theta$ も $\mathbb{R}$ 上連続である。

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ も $\sin\theta$, $\cos\theta$ が連続なので連続となる。

なお, $y=\sin\theta : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ は 狭義単調増加なので,

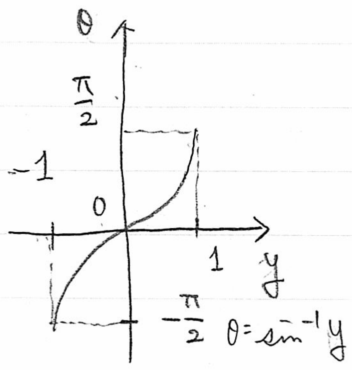
逆関数 $\theta = \sin^{-1} y : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を取れる

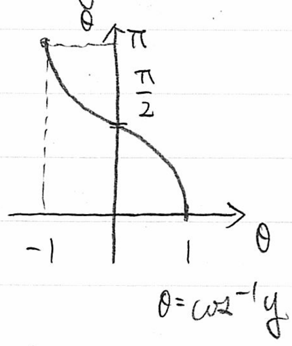
$y = \cos\theta : [0, \pi] \to [-1, 1]$ は 狭義単調減少なので

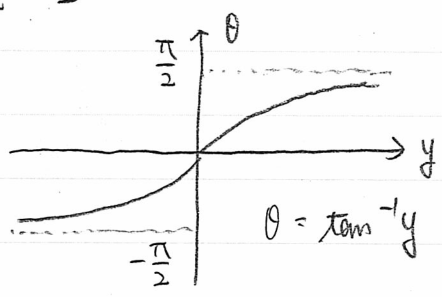
逆関数 $\theta = \cos^{-1} y : [-1, 1] \to [0, \pi]$ を取れる

$y = \tan\theta : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ は, 狭義単調増加なので

逆関数 $\theta = \tan^{-1} y : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を取れる.







よく使われる記号表

$\therefore$ or $\therefore$	故に，従って，	Therefore
$\because$ or $\because$	なぜならば，	because
i.e.,	すなわち.	
Q.E.D.	証明終わり	
$\square$	証明終わり.	
//	証明終わり.	
up to ~	~を除いて	
iff	同値	(ex) A iff B，意味 AとBは同値
for $\forall x$	$\forall x$ に対して.	
~ s.t. …	…の条件を満たす~	(ex) $\exists x \in \mathbb{R}$ s.t. $x>1$ $x>1$ を満たすような実数 x が存在する.
$A := B$	AをBと定義する	
$A \underset{\text{put}}{=} B$	AをBとおく。	
$f(x) \equiv C$	$f(x)$ は恒等的に C	
$\leqslant$ or $\leq$	≦	
$\geqslant$ or $\geq$	≧	
Def or Dfn	Definition	(定義)
Th. or Thm	Theorem	(定理)
prop	proposition	(命題)
Lem.	Lemma	(補題)
Claim	Claim	(主張)
Cor	Corollary	(系)
proof	proof	(証明)
Rem.	Remark	(注意)
Axiom or Axm.	Axiom	(公理)
e.g. or ex	example	(例)