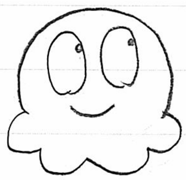
解析学入門



$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

$$\underset{def}{\iff} \ {}^{\forall}\varepsilon > 0,\ {}^{\exists}\delta > 0,\ {}^{\forall}x \in \mathbb{R},$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

$$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \phi$$

$$U(A) := \{ x \in \mathbb{R} \mid {}^{\forall}a \in A,\ a \leq x \}$$

$$U(A) \neq \phi \Rightarrow {}^{\exists}\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$$

目次

授業ノート編

解析学入門 補足編

§1 命題と論理記号

<u>Def</u> 命題 … 真偽が正しいか正しくないか
(定義の意味) 判定できる文章

<u>Def</u> P, Q; 命題とする。

$$\begin{cases} P\text{かつ}Q \ (P \wedge Q) \\ P\text{または}Q \ (P \vee Q) \end{cases}$$ を次で定める

真理表

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

$\begin{pmatrix} 1 \cdots \text{真} \\ 0 \cdots \text{偽} \end{pmatrix}$

→ 横に見る

<u>Def</u> 命題 P の否定を

$\neg P$ or $\overline{P}$ と書く。

P	$\neg P$
1	0
0	1

(排中律)

<u>Def</u> 「$P \Rightarrow Q$」を、次で定めた。

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

(注) Pが偽なら、$P \Rightarrow Q$は自動的に
真と約束する。

<u>Def</u> 真偽が一致する命題を、同値な命題
という

(ex) 「$P \Rightarrow Q$」と、$\neg(P \vee Q)$ は 同値

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

○ 変数を含む命題（述語）

Def 「xは偶数である」のように、変数xを含む
命題を$P(x)$と書く。

集合Dを、命題$P(x)$の定義域とする。

Def 「Dの任意の元（＝要素）xに対して、
命題$P(x)$が真である」という命題を

$${}^\forall x \in D \; (P(x))$$ とか、$${}^\forall x : P$$ と書く。

(ex) ${}^\forall x \in \mathbb{R} \; (x^2 \geqq 0)$ は真。${}^\forall x \in \mathbb{C} \; (x^2 \geqq 0)$ は偽。

Def 「あるDの元xが存在して、命題$P(x)$が真である。」
という命題を、「${}^\exists x \in D \; (P(x))$」or
「${}^\exists x$ s.t. P」 or 「${}^\exists x : P$」と書く。
(s.t. = such that)

(ex) 「${}^\exists x \in \mathbb{R} \; (x^2 - 1 \leqq 0)$」は真

「${}^\exists x \in \mathbb{R} \; (x^2 + 1 \leqq 0)$」は偽

（問1）

○命題の否定の作り方

規則 1. $\neg(P \land Q) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q$

2. $\neg(P \lor Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q$

de Morgan's law

3. $\neg\left({}^{\forall}(\text{条件})\ (P(x))\right)$

$\Leftrightarrow\ {}^{\exists}(\text{条件})\ (\neg P(x))$

4. $\neg\left({}^{\exists}(\text{条件})\ (P(x))\right)$

$\Leftrightarrow\ {}^{\forall}(\text{条件})\ (\neg P(x))$

※ 条件の部分は変化しない

(ex) 3. $\neg\left({}^{\forall}\underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\boxed{\text{条件}}}\ \underbrace{(x^2 \geqq 0)}_{\boxed{\text{命題}P(x)}}\right)$ $\quad \neg(\text{真})$

$\Leftrightarrow\ {}^{\exists}x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0)$ $\quad \Updownarrow$ 偽

4. $\neg\left({}^{\exists}x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0)\right)$

$\Leftrightarrow\ {}^{\forall}x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geqq 0)$

Point 命題を否定するときは、
$\forall$ を $\exists$ に、$\exists$ を $\forall$ に 入れかえる。

問2.

(ex) $\forall x>0\ (\exists y \in \mathbb{R}\ (y^2=x))$ …(a)

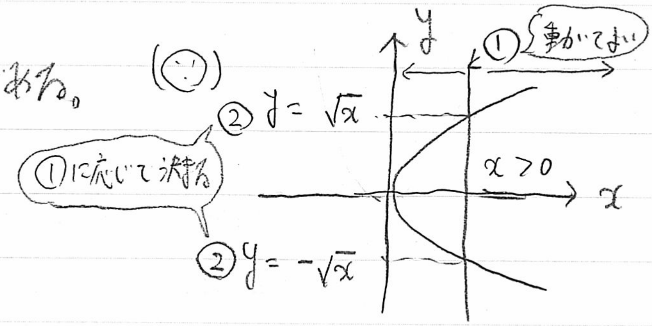
$\Longleftrightarrow$「$x>0$ を満たす任意の(実)数 x に対して、

ある実数の元 y が存在して、$y^2=x$ が真である。」

という命題

(注) $\forall x>0,\ \exists y\in\mathbb{R} : y^2=x$ とも書く。

(a) は真である。(☺)



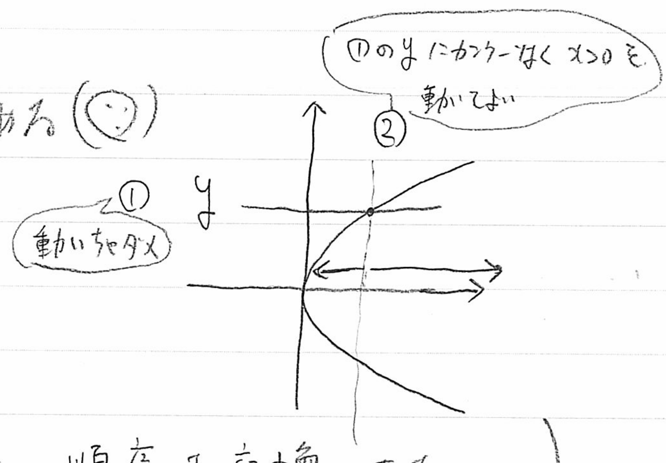
(ex) $\exists y\in\mathbb{R}\ (\forall x>0\ (y^2=x))$ …(b)

$\Longleftrightarrow$「ある実数の元 y が存在して、

$x>0$ を満たす任意の実数 x に対して、

$y^2=x$ が真である」という命題

(b) は偽である(☹)



point (一般に、$\forall$ と $\exists$ の順序は交換できない。)

§2 集合

Def 条件のはっきりしたものの集まりを、1つのかたまりと考えたものを集合 (set) という.

Def S ; 集合とする。Sを構成する個々のものをSの元 (element) または要素といい

$$x \text{が} S \text{の元} \underset{\text{def}}{\iff} x \in S$$

と表すように定義する.

Def xがSの元でない $\iff x \notin S$.

。部分集合

A, B ; 集合とする。

$$\forall x \in A\ (x \in B) \iff \forall x \in A\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

が成り立つとき, AはBの部分集合であるといい,

$$A \subset B \quad \text{or} \quad B \supset A$$

で表す。

また, $A = B \underset{\text{def}}{\iff}$ 「$A \subset B \wedge B \subset A$」

とし, $A = B$ を集合Aと集合Bは等しいという.

○ 集合の表し方

○ 外延的記法

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

○ 内包的記法

集合 D を定義域とする命題 $P(x)$ が真となる全ての $x \in D$ からなる集合を

$$\{x \in D \mid P(x)\} \quad \text{or} \quad \{x \in D \,;\, P(x)\}$$

と書く。

(注) $\{x \mid P(x),\ x \in D\}$ などもある。

○ 空集合

Def 元を1つも含まない集合を、空集合 (empty set) といい、$\emptyset$ or $\{\ \}$ で表す。

(ファイではない。)

<u>Def</u>　S, Tを集合とするとき,

$$S \cap T \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in S \text{ かつ } x \in T\}$$

$$S \cup T \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in S \text{ または } x \in T\}$$

で定め, $S \cap T$ を SとTの共通部分 (intersection)

$S \cup T$ を SとTの和集合 (union)

という。

一般に, $S_1, \cdots, S_n$ を n個の集合とするとき,

$$\bigcap_{i=1}^{n} S_i \overset{\text{def}}{=} \{x \mid {}^{\forall} i \in \{1, \cdots, n\} \, (x \in S_i)\} \quad : \text{共通部分}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} S_i := \{x \mid {}^{\exists} i \in \{1, \cdots, n\} \, (x \in S_i)\} \quad : \text{和集合}$$

と定める。

更に, $\Lambda \, (\neq \phi)$ を集合 (有限集合とは限らない) とし,

$S_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$ も集合とするとき,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \{x \mid {}^{\forall} \lambda \in \Lambda \, (x \in S_\lambda)\} \quad : \text{共通部分}$$

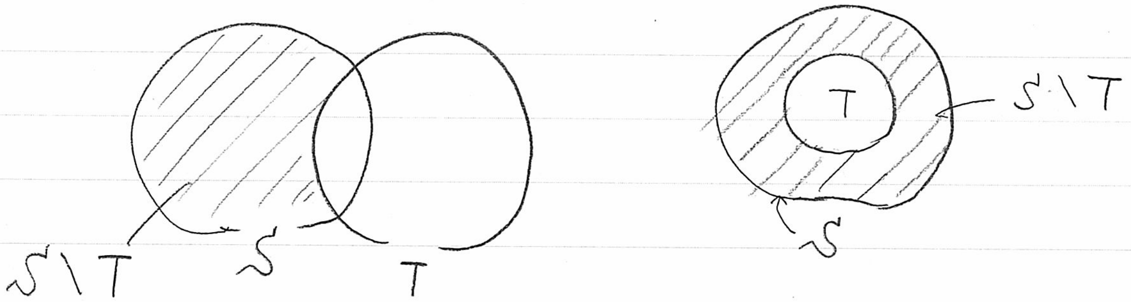
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda := \{x \mid {}^{\exists} \lambda \in \Lambda \, (x \in S_\lambda)\} \quad : \text{和集合}$$

と定める。

Def S, T ; 集合とする.

$$S \setminus T := \{ x \mid x \in S \text{ かつ } x \notin T \}$$

と定め, S と T との差集合という.



Def $S \supset T$ のとき, $S \setminus T$ のことを, S に対する T の補集合という.

Def 考えている集合が, 全てある1つの固定された集合 X の部分集合である場合, X を普遍集合 (universal set) という. (注) このとき $X \setminus S$ を S^c や $\overline{S}$ と書く.

Prop X ; universal set, $S, T \subset X$,

$\forall \lambda \in \Lambda \ (S_\lambda \subset X)$ とする. このとき,

(1) $S \cup S^c = X$, $S \cap S^c = \phi$

(2) $(S^c)^c = S$

(3) $\phi^c = X$, $X^c = \phi$

(4) $S \supset T \iff S^c \subset T^c$

(5) $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$, $(S \cap T)^c = S^c \cup T^c$

(6) $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda{}^c$, $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda{}^c$

de Morgan's law

(☺) (1) ∘ $S \cup S^c = X$

$\Leftrightarrow$ $S \cup S^c \subset X$ かつ $S \cup S^c \supset X$.

(i) $S \cup S^c \subset X \Leftrightarrow$「$\forall x \in S \cup S^c \Rightarrow x \in X$」を示す。

$\forall x \in S \cup S^c$, 取る。すなわち, $x \in S$ であり, $S \subset X$ なので

$x \in X$.

(ii) $S \cup S^c \supset X \Leftrightarrow$「$\forall x \in X \Rightarrow x \in S \cup S^c$」を示す。

$\forall x \in X$, 取る。 $x \in S \subset X$ のとき, $x \in S \cup S^c$.

$x \notin S$ のとき, $S^c = X \setminus S = \{x \in X \mid x \in X$ かつ $x \notin S\}$

より, $x \in X \setminus S = S^c$. 従って, x は S か S^c の要素

なので, $x \in S \cup S^c$.

∘ $S \cap S^c = \phi$

$\Leftrightarrow$「$\forall x \in X \Rightarrow x \notin S \cap S^c$」を示せば良い。

$\forall x \in X$, 取る。このとき, $X = S \cup S^c$ より

$x \in S$ または $x \in S^c$ である。

ここで $x \in S$ のとき, $S^c = \{x \in X \mid x \in X$ かつ $x \notin S\}$ より,

$x \notin S^c$. 逆に, $x \in S^c$ のとき,

$x \in X$ かつ $x \notin S$ より, $x \notin S$ である。

従って, S と S^c の共通部分に属する $x \in X$ は

存在しないので, $S \cap S^c = \phi$. □

(2) (∵) $(S^c)^c = S$

$\Leftrightarrow$「$(S^c)^c \subset S$ かつ $S \subset (S^c)^c$」

(i) $(S^c)^c \subset S \Leftrightarrow {}^\forall x \in (S^c)^c \Rightarrow x \in S$ を示す。

$(S^c)^c = \{x \in X \mid x \in X$ かつ $x \notin S^c\}$ であり

${}^\forall x \in (S^c)^c$ とすると、$x \in X$ かつ $x \notin S^c$.

ここで、$x \notin S^c = X \setminus S$ とすると、(1) $S \cap S^c = \phi$

より、$x \in S$.

(ii) $S \subset (S^c)^c \Leftrightarrow {}^\forall x \in S \Rightarrow x \in (S^c)^c$ を示す。

${}^\forall x \in S$ とすると、(1) $S \cap S^c = \phi$ より $x \notin S^c$.

従って、$x \in \{x \in X \mid x \in X$ かつ $x \notin S^c\}$ より

$x \in (S^c)^c$. D

(3) (∵) $\phi^c = X$

$\phi^c \Leftrightarrow X \setminus \phi$. ϕ には元が存在しないので

$X \setminus \phi = X$。従って、$\phi^c = X$.

$X^c = \phi$

$X^c \Leftrightarrow X \setminus X \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in X$ かつ $x \notin X\}$

$x \in X$ かつ $x \notin X$ となるような元は存在しないので、

$X \setminus X = \phi \quad \therefore X^c = \phi$. D

(4) $S \supset T \Leftrightarrow S^c \subset T^c$

(∵) 「$S \supset T \Rightarrow S^c \subset T^c$」及び「$S \supset T \Leftarrow S^c \subset T^c$」

を示せばよい。

(i) $S \supset T \Rightarrow S^c \subset T^c$ を示す。($S \subset X$, $T \subset X$ に注意)

$S \supset T$ と仮定すると, ${}^\forall x \in X \, (x \in T \Rightarrow x \in S)$

である。対偶は ${}^\forall x \in X \, (x \notin S \Rightarrow x \notin T)$

であり, すなわち, $x \in X \setminus S \Rightarrow x \in X \setminus T$ であるから,

$${}^\forall x \in X \left(x \in S^c \Rightarrow x \in T^c \right) \Leftrightarrow S^c \subset T^c$$

(ii) $S^c \subset T^c \Rightarrow S \supset T$ を示す.

$S^c \subset T^c$ と仮定すると. ${}^\forall x \in X \, (x \in X \setminus S \Rightarrow x \in X \setminus T)$

である。対偶は. ${}^\forall x \in X \, (x \notin X \setminus T \Rightarrow x \notin X \setminus S)$

(1) より. $\begin{cases} x \notin X \setminus T \Leftrightarrow x \in T \\ x \notin X \setminus S \Leftrightarrow x \in S \end{cases}$ より

$${}^\forall x \in X \, (x \in T \Rightarrow x \in S) \Leftrightarrow T \subset S_{\,/\!/} \quad \square$$

(5) ① $(S\cup T)^c = S^c\cap T^c$

$\Leftrightarrow$ $(S\cup T)^c \subset (S^c\cap T^c)$ かつ $(S\cup T)^c \supset (S^c\cap T^c)$

を示せばよい。

(i) $(S\cup T)^c \subset (S^c\cap T^c)$ を示す。

$^\forall x \in (S\cup T)^c$, 取る。すなわち $x\in\{x\in X \mid x\in X$ かつ $x\notin S\cup T\}$.

よって, $x\notin S\cup T$ 。すなわち $x\notin S$ かつ $x\notin T$ である。

従って, $x\in X\setminus S$ かつ $x\in X\setminus T$

$\Leftrightarrow$ $x\in S^c\cap T^c$ である。

(ii) $(S^c\cap T^c)\subset(S\cup T)^c$ を示す。

$^\forall x\in S^c\cap T^c$, 取る。すなわち

$x\in X\setminus S$ かつ $x\in X\setminus T$ 。従って, xは

SにもTにも含まれないXの元である。

よって $x\notin S\cup T \Leftrightarrow x\in(S\cup T)^c$

$(S\cap T)^c = S^c\cup T^c$

$\Leftrightarrow$ $(S\cap T)^c\subset(S^c\cup T^c)$ かつ $(S^c\cup T^c)\subset(S\cap T)^c$

を示せばよい。

(i) $(S\cap T)^c\subset(S^c\cup T^c)$ を示す。

$^\forall x\in(S\cap T)^c \Leftrightarrow x\in\{x\in X \mid x\in X$ かつ $(x\notin S\cap T)\}$

$\Leftrightarrow x\in\{x\in X \mid x\in X$ かつ $(x\in S\setminus T$ または $x\in T\setminus S)\}$

$S\subset X$, $T\subset X$ より

$\begin{cases} x\in S\setminus T \Rightarrow x\in X\setminus T \\ x\in T\setminus S \Rightarrow x\in X\setminus S \end{cases}$ となり.

$\Rightarrow \quad x \in \{ x \in X \mid x \in X \setminus T$ または $x \in X \setminus S \}$

$\Leftrightarrow \quad x \in T^c \cup S^c$ //

$(S^c \cup T^c) \subset (S \cap T)^c$ を示す。

${}^{\forall} x \in S^c \cup T^c \Leftrightarrow x \in \{ x \mid x \in X \setminus S$ または $x \in X \setminus T \}$

$\Leftrightarrow x \in \{ x \mid (x \in X \setminus S$ かつ $x \in X \setminus T)$

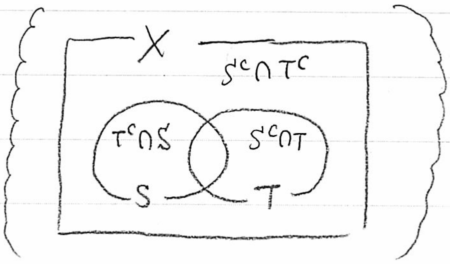
または $(x \in X \setminus S$ かつ $x \in T)$

または $(x \in X \setminus T$ かつ $x \in S) \}$

$\Leftrightarrow x \in \{ x \mid x \in S^c \cap T^c$

または $x \in S^c \cap T$

または $x \in S \cap T^c \}$



すなわち x は $S \cap T$ には属していない。よって

$x \notin S \cap T$ 故、$x \in (S \cap T)^c$ //

(6) (◎) $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda{}^c$

$x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right)^c \Leftrightarrow x \in X$ かつ $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$

$\Leftrightarrow x \in X$ かつ $\neg ({}^{\exists} \lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in S_\lambda)$

$\Leftrightarrow x \in X$ かつ ${}^{\forall} \lambda \in \Lambda \, (x \notin S_\lambda)$

$\Leftrightarrow x \in X$ かつ $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda{}^c$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda{}^c$ //

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda{}^c$$

$$x \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\right)^c \Leftrightarrow x\in X \text{ かつ } x \notin \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$$

$$\Leftrightarrow x \in X \text{ かつ } \neg\left({}^\forall\lambda\in\Lambda\ (x\in S_\lambda)\right)$$

$$\Leftrightarrow x\in X \text{ かつ } {}^\exists\lambda\in\Lambda\ (x\notin S_\lambda)$$

$$\Leftrightarrow x\in X \text{ かつ } x\in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda{}^c$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda{}^c \quad //$$

§3 写像

Def　A, B を集合とする。Aの全ての要素 $a \in A$ に対して、各々
Bの元 $b \in B$ が１つ対応するとき、この対応を
AからBへの **写像** または **関数** という。
aに対して決まる b を $f(a)$ と書き、fによるaの **像** または **値**
という。写像 f を

$$f : A \to B \quad \text{または} \quad f : A \to B \quad a \mapsto f(a)$$

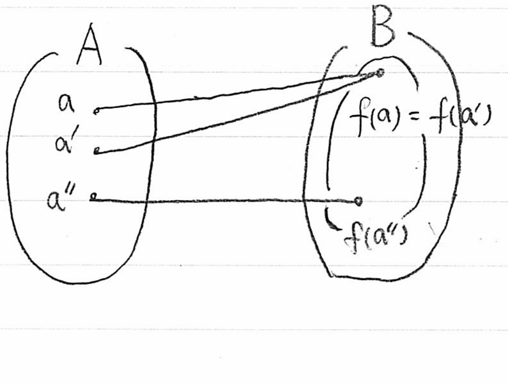
などと表す。A を fの **始集合**、B を fの **終集合** という。

(注) ○ Bの元 $f(a)$ は、$a \in A$ に対して唯一つである。

つまり　$f(x) = \pm x$ （二つの Bの元）は、写像ではない。

○ $a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) = f(a')$ はよい。

○ Bの要素すべてが、$f(a)$ の形にならなくてもよい。



Def 写像 $f: A \to B$ が全射

$\Leftrightarrow$ ${}^\forall b \in B$ に対して，$f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在する。

Def 写像 $f: A \to B$ が単射

$\Leftrightarrow$ $a_1 \in A$，$a_2 \in A$ に対し，

$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つ。

(注)「$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$」

$\Leftrightarrow$「$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$」（対偶）

Def 写像 f が全射かつ単射であるとき

f は全単射であるという。

Def $f: A \to B$，$g: B \to C$ に対して，

A の各元 a に対して C の元 $g(f(a))$ を対応させる

A から C への写像を，f と g の合成写像といい，

$g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f: A \to C,\ (g \circ f)(a) = g(f(a)),\ (a \in A)$$

Def $A \neq \phi$：集合とする。${}^\forall a \in A$ に対し，a を対応させる A から A への写像 $id_A: A \to A$，$(a \mapsto a)$ を，A の恒等写像であるという。つまり $id_A(a) = a$.

prop 写像 $f: A \to B$, $g: B \to C$ が共に単射であるとき, $g \circ f: A \to C$ も単射である。

(point) $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ に対し,
(「$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$」を言えばよい)

(☺) $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ に対し, $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

と仮定する。このとき $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

$$\Leftrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

g が単射なので, $f(a_1) = f(a_2)$

更に, f が単射なので, $a_1 = a_2$。従って, $g \circ f$ は単射 □

prop 写像 $f: A \to B$, $g: B \to C$ が共に全射であるとき, $g \circ f: A \to C$ も全射である

(point) (「${}^\forall c \in C$ に対して, $c = g \circ f(a)$ となる $a \in A$ が存在する」を示せばよい。)

(☺) g が全射であることより, ${}^\forall c \in C$ に対して,

$c = g(b)$ となる $b \in B$ が存在する。

この $b \in B$ に対して, f が全射であることより

$b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在する。

従って $c = g(b) = g(f(a)) = g\circ f(a)$

となる $a \in A$ が存在する。よって $g\circ f$ は全射。□

<u>prop</u> $f: A \to B,\ g: B \to A$ とする。

また, id_A, id_B を各々 A, B の恒等写像とするとき

$$\left(\begin{array}{ll} id_A : A \to A & , id_B : B \to B \\ \quad\ \ \rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$} & \qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$} \qquad \rotatebox{90}{$\in$} \\ \quad\ \ a \mapsto id_A(a) = a & \qquad\quad b \mapsto id_B(b) = b \end{array} \right)$$

(1) $g\circ f = id_A$ のとき, f は単射で, g は全射

(2) $g\circ f = id_A$ かつ $f\circ g = id_B$ のとき f は全単射

(☺) (1) f が単射であることを示す。

つまり, $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ に対し,

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ を示せば良い。

$f(a_1) = f(a_2)$ と仮定すると, $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2$ よって f は単射。

g が全射であることを示す。

つまり, ${}^\forall a \in A$ に対し, $g(b) = a$ となる $b \in B$ が存在する。

ことを示せば良い。

${}^\forall a \in A$ を取る $f(a) = b \in B$ とおくと,

$f(a) = b \Leftrightarrow g(f(a)) = g(b) \Leftrightarrow a = g(b)$ となり

g は全射である。

(2) f が全単射 $\Leftrightarrow$ f が全射かつ単射 を示せばよいが,

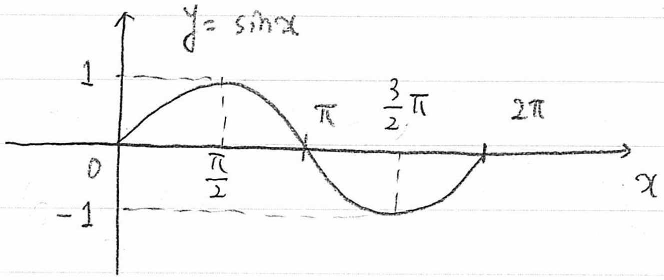
(1) より. $g \circ f = id_A \Rightarrow f$ は単射. (g は全射)

$f \circ g = id_B \Rightarrow f$ は全射 (g は単射)

が言える。従って, f は全単射. □

(ついでに, g も全単射である。) □

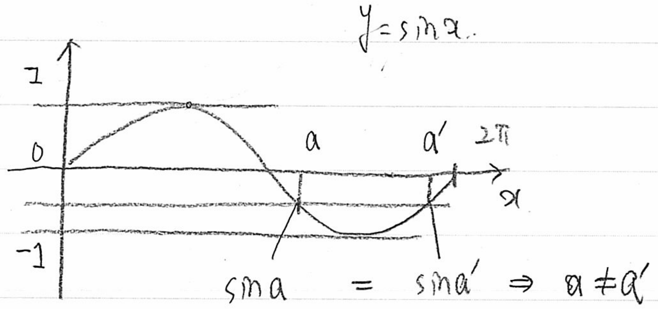
(ex)



$f : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$

${}^{\forall} x \in \mathbb{R}\ (-1 \leqq \sin x \leqq 1)$ より, f は定義され,

f は全射であるが, 単射ではない。

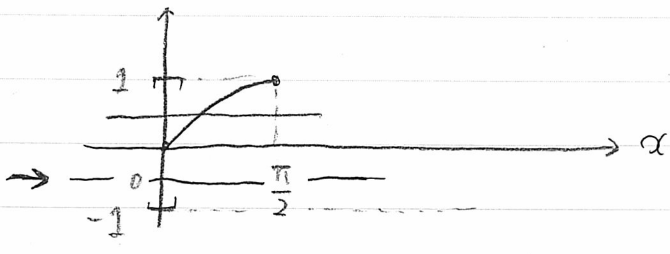


$g : [0, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $g(x) = \sin x$

g は定義され,

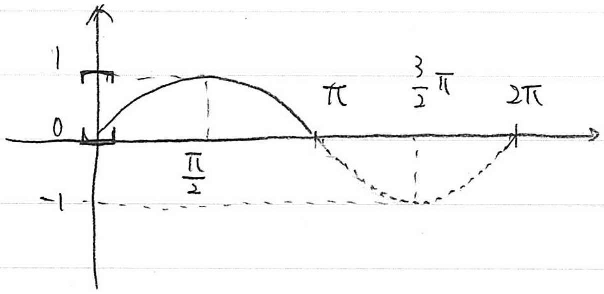
単射ではあるが,

全射ではない。



$h:[0,2\pi] \longrightarrow [0,1]$, $h(x) = \sin x$.

h は定義されない。$\because$ (値域) $\supset$ (終域) である! ($\sin\frac{3}{2}\pi = -1 \notin [0,1]$)



○ 逆写像

$f: A \to B$ が全単射であるとき,

f は全射 $\Leftrightarrow$ ${}^{\forall}b \in B$ に対して, $b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在する。

$b = f(a)$ となる $a \in A$ が

仮に a_1, a_2 と二つあったとすると,

$b = f(a_1) = f(a_2)$. f は単射でもあるので

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

よって, 実は二つ以上あったとしても一致するので, このような $a \in A$ は唯一つである。

<u>Def</u> $f: A \to B$; 全単射であるとき

${}^{\forall}b \in B$ に対して $f(a) = b$ を満たす唯一つの a を対応させる対応を f の逆写像 or f の逆関数といい

$f^{-1}: B \to A$ で表す。

○ 像・逆像

$f: S \to T$, $S_1 \subset S$, $T_1 \subset T$ とする.

$$f(S_1) := \{ f(s) \in T : s \in S_1 \} \quad (像)$$

$$f^{-1}(T_1) := \{ s \in S \,;\, f(s) \in T_1 \} \quad (逆像)$$

と定義し，それぞれ f による S_1 の像 (image)，

f による T_1 の逆像 (inverse image) という.

特に，像 $f(S)$ を f の値域と呼ぶこともある.

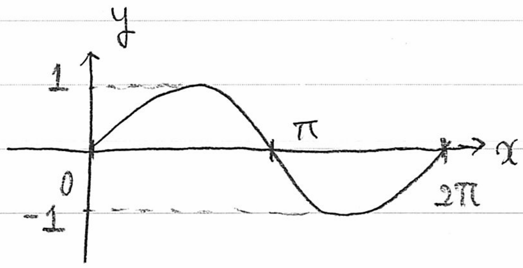
(注) $f^{-1}(T_1)$ は空集合になることもある。

また，$t \in T$ とするとき，$f^{-1}(\{t\})$ のことを，単に

$f^{-1}(t)$ で表すこともある。

(ex) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto \sin x \quad (f(x) = \sin x)$

とする。



○ $f([0, 2\pi]) = [-1, 1]$

○ $f^{-1}([0, 1]) = [0, \pi]$

○ $f^{-1}([2, 3]) = \phi \quad \left(\because\ -1 \leqq \overset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{\sin x}} \leqq 1 \text{ である!} \right)$

○ $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \,;\, n \in \mathbb{N} \right\}$

Prop 写像 $f:S\to T$ について、次が成り立つ.

(1) $f:S\to T$（全射）$\Leftrightarrow$ $f(S)=T$

(2) $f:S\to T$（全単射）$\Leftrightarrow$

$$\forall t\in T\left(\exists! s\in S\,(t=f(s))\right)$$

(☺) (1) ($\Rightarrow$) fが全射であると仮定する。

$f(S)\subset T$ かつ $f(S)\supset T$ を示せばよい。

(i) $f(S)\subset T$ は、像の定義より

$f(S)=\{f(s)\in T : s\in S\}$だから、$f(S)\subset T$。

(ii) $f(S)\supset T$ を示す。今、$\forall t\in T$ を1つ取る。

仮定より、fは全射なので、

$$\exists s\in S \text{ s.t. } t=f(s)$$

が成り立つ。そこで、この $s\in S$ を取れば、

$t=f(s)\in f(S)$ となり、$T\subset f(S)$ //

($\Leftarrow$) $f(S)=T$ と仮定する。

$\forall t\in T$ を取る。このとき、$T\subset f(S)$ より

$t\in f(S)=\{f(s)\in T\,;\,s\in S\}$ となるので、

$\exists s\in S$ s.t. $t=f(s)$. 従って、fは全射である。□

(2) ($\Rightarrow$) $f: S \to T$ が全単射である

と仮定する。このとき、fが全射より

$\forall t \in T\ (\exists s \in S\ (t = f(s)))$.

$t = f(s)$ を満たす s が唯一つであることを示す。

$t = f(s_1) = f(s_2)$ とすると、fは単射なので $s_1 = s_2$。

従って、このような $s \in S$は唯一つしかない。故に

$\forall t \in T\ (\exists ! s \in S\ (t = f(s)))$

($\Leftarrow$) $\forall t \in T\ (\exists ! s \in S\ (t = f(s)))$ と仮定する。

仮定より fは全射であり、

単射性は、$f(s_1) = f(s_2) = t$ となる s_1, s_2が存在

したとすると、仮定より sは一意的なので

$s_1 = s_2$。従って、fは全単射である。

§4 基本的な用語

○ 上限 (supremum), 下限 (infimum)

以降, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ とする。

Def (i) $M \in \mathbb{R}$ が A の最大元 (最大値)

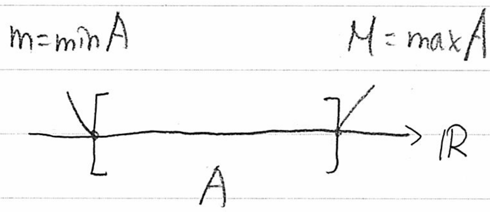
$\iff$ $M \in A$ かつ $^{\forall} a \in A$ に対し, $a \leq M$ が成立する。

M を $\max A$ と表す

(ii) $m \in \mathbb{R}$ が A の最小元

$\iff$ $m \in A$ かつ $^{\forall} a \in A$ に対し, $m \leq a$ が成立する。

m を $\min A$ と表す



チルダ
← tilde

Def (i) $\tilde{M} \in \mathbb{R}$ が A の上界

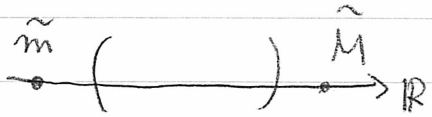
$\iff$ $^{\forall} a \in A$ に対し, $a \leq \tilde{M}$

(ii) $\tilde{m} \in \mathbb{R}$ が A の下界

$\iff$ $^{\forall} a \in A$ に対し, $\tilde{m} \leq a$

(Remark) A の上界 $\tilde{M}$ は, A に属すか否か問わない

A の下界 $\tilde{m}$ は 〃

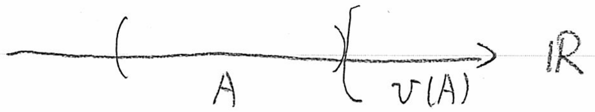


上界全体を $U(A) := \{ \tilde{M} \in \mathbb{R} \mid \tilde{M}$ は A の上界 $\}$

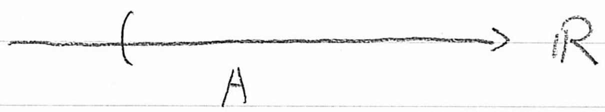
下界全体を $L(A) := \{ \tilde{m} \in \mathbb{R} \mid \tilde{m}$ は A の下界 $\}$

<u>Def</u> (i) $U(A) \neq \phi$ のとき、A は上に有界であるという

$U(A) \neq \phi$:

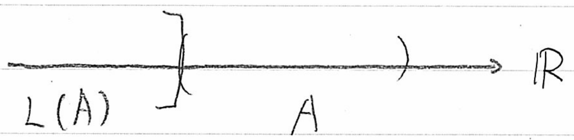


$U(A) = \phi$:

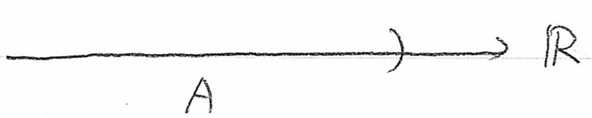


(ii) $L(A) \neq \phi$ のとき、A は下に有界であるという

$L(A) \neq \phi$:



$L(A) = \phi$:



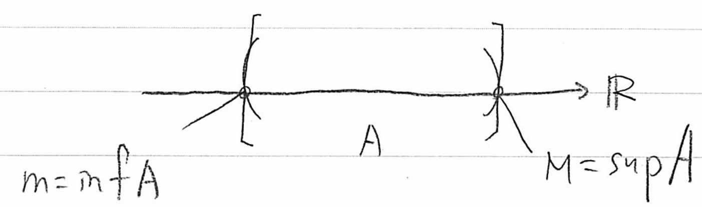
(iii) $U(A) \neq \phi$ かつ $L(A) \neq \phi$ のとき、A は有界であるという

<u>Def</u> (i) $U(A)$ の最小値 M があれば、M を A の上限と呼び、

$M = \sup A$ と書く。(A がギリギリ近づける値)

(ii) $L(A)$ の最大値 m があれば m を A の下限と呼び

$m = \inf A$ と書く。



Prop (i) $^{\exists}\max A \Rightarrow \sup A = \max A$

(ii) $^{\exists}\min A \Rightarrow \inf A = \min A$

(問5, 問6)

Prop (a) $M = \sup A$

$\Longleftrightarrow$ (i) $^{\forall}a \in A,\ a \leq M$

(ii) $^{\forall}x \in \mathbb{R},\ x < M \Rightarrow {}^{\exists}a \in A;\ x < a \leq M$

(b) $m = \inf A$

$\Longleftrightarrow$ (i) $^{\forall}a \in A,\ m \leq a$

(ii) $^{\forall}x \in \mathbb{R},\ m < x \Rightarrow {}^{\exists}a \in A;\ m \leq a < x.$

(∵) (a) $M = \sup A$

$\Longleftrightarrow {}^{\exists}M \in \mathcal{U}(A),\ {}^{\forall}x \in \mathbb{R};\ x \in \mathcal{U}(A) \Rightarrow M \leq x$

ここで, $M \in \mathcal{U}(A) \Longleftrightarrow {}^{\forall}a \leq A,\ a \leq M \Longleftrightarrow$ (i)

$^{\forall}x \in \mathbb{R};\ x \in \mathcal{U}(A) \Rightarrow M \leq x$ ↓ 対偶

$\Longleftrightarrow {}^{\forall}x \in \mathbb{R}:\ x < M \Rightarrow x \notin \mathcal{U}(A)$

$\Longleftrightarrow {}^{\forall}x \in \mathbb{R}:\ x < M \Rightarrow {}^{\exists}a \in A,\ x < a \leq M$

$\Longleftrightarrow$ (ii)

(b) も同様. □

§5 実数の連続性公理

公理：万人が認める命題
axiom

Axiom 実数 $\mathbb{R}$ は次の性質を持つ

$\forall A \subset \mathbb{R},\ A \neq \phi$ に対して

A が上に有界 $\Rightarrow \exists s \in \mathbb{R},\ s = \sup A$

(Remark) $\mathbb{Q}$ はこの性質を満たさない

(ex) $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$

$U(A) := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 \geqq 2\}$

となるが，$x^2 = 2$ を満たす $x \in \mathbb{Q}$ は存在しない。

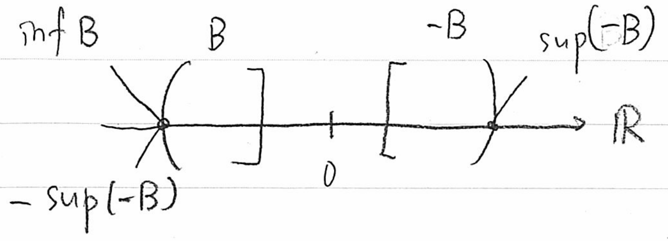
$\therefore\ U(A) \subset \mathbb{Q}$ は最小値を持たない.

Prop $B \subset \mathbb{R}$ が下に有界

$\Rightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ t = \inf B$

更に，$\inf B = -\sup(-B)$

$\left(-B := \{-x \mid x \in B\} \right)$



(☺) $B \subset \mathbb{R}$ が下に有界 $\Leftrightarrow L(B) \neq \phi$.

$L(B) = -U(-B)$ より, $U(-B) \neq \phi$.

従って, ${}^{\exists} t \in \mathbb{R}$ s.t. $t = \sup(-B)$

一方, $L(B) = -U(-B) = \{-x \mid x \in U(-B)\}$

より $L(B)$ の最大値は $-t$ となる. よって

$\inf B = -\sup(-B)$ //

Prop $\phi \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ とする.

(i) B が上に有界 $\Rightarrow$ A が上に有界 であり,

$\sup A \leq \sup B$.

(ii) B が下に有界 $\Rightarrow$ A が下に有界 であり

$\inf B \leq \inf A$

(☺) (i) $A \subset B \Rightarrow U(A) \supset U(B) \neq \phi$,

$\min U(A) \leq \min U(B)$ より

$\sup A \leq \sup B$.

(ii) $A \subset B \Rightarrow L(A) \supset L(B) \neq \phi$

$\max L(A) \geq \max L(B)$ より

$\inf B \leq \inf A$ □

§6 数列の極限

○ Archimedes's principle

<u>Thm</u> $\mathbb{N}$ は上に有界でない。

(∵) $\mathbb{N}$ が上に有界であると仮定する。(背理法)

このとき、$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ より axiom から

$\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $M = \sup \mathbb{N}$

$M-1 \in \mathbb{R}$, $M-1 < M$ より prop より

$\exists a \in \mathbb{N}$ s.t. $M-1 < a \leqq M$

従って、$M < a+1$ となるが、$a+1 \in \mathbb{N}$. 矛盾 □

○ $\varepsilon - N$ 論法

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束する (収束列)

$\Leftrightarrow$ $^\forall\varepsilon > 0$ に対し、ある自然数 N が存在し、

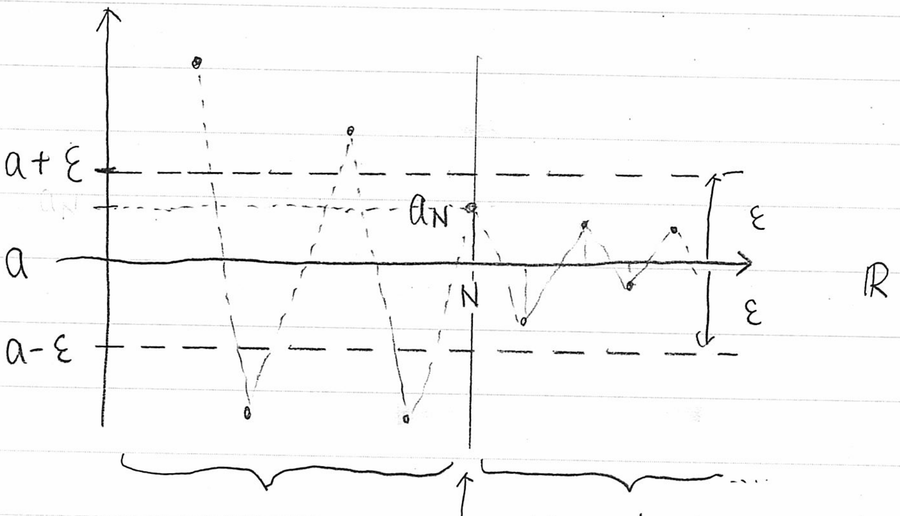
$n \geqq N$ を満たす任意の n に対して

$|a_n - a| < \varepsilon$ を満たす。

$\Leftrightarrow$ $^\forall\varepsilon>0\ (^\exists N\in\mathbb{R}\ (^\forall n\in\mathbb{N}\ (n\geqq N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon)))$

このとき、$a_n \to a\ (n\to\infty)$ or $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ などと書き、

a を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限値と呼ぶ。



Point　N は ε に依存して決まる
（→ ε を先に決めて、次に ε を元に N を決める。）

(ex)　$\dfrac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$

(☺)　MEMO：目標：$\left|\dfrac{1}{N}-0\right| < \varepsilon$ となる N を見つける。

$N>0$ より、$\left|\dfrac{1}{N}-0\right| = \dfrac{1}{N}$，従って $\varepsilon>0$ に対して

$$\frac{1}{N} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < N.$$

このような N はアルキメデスの原理により存在する。

（具体的には。$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] \leqq \dfrac{1}{\varepsilon} < \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1 = N$ 〃）

${}^\forall \varepsilon > 0$ を取る. $N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ととれば, ${}^\forall n \geq N$ に対し,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \square$$

○ Cauchy 列

${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists N \in \mathbb{N},\ {}^\forall m \in \mathbb{N},\ {}^\forall n \in \mathbb{N},$

$$m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

を満たす数列を Cauchy 列という.

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ なら

Cauchy 列 $\Leftrightarrow$ 収束列

prop $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が非減少 $(a_n \leqq a_{n+1})$ で上に有界ならば、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

(∵) $a_n \leqq a_{n+1}$, $a_n \leqq M$ とする.

${}^\forall \varepsilon > 0$, 取る。$\alpha := \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ とおくと,

${}^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\alpha-\varepsilon < a_N$. よって, ${}^\forall n \geqq N$ に対して

$$\alpha-\varepsilon < a_N \leqq a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \sup\text{の定義}}}{\leqq} \alpha$$ となり

$$\therefore\ -\varepsilon < a_N-\alpha \leqq a_n-\alpha < 0 < \varepsilon$$

$$\therefore\ |a_n-\alpha| < \varepsilon \quad \square$$

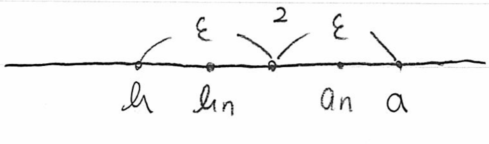
prop $a_n \to a\ (n\to\infty)$, $b_n \to b\ (n\to\infty)$,

${}^\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n \leqq b_n \Rightarrow a \leqq b$

(∵) 背理法. $a > b$ と仮定する. $\varepsilon := \dfrac{a-b}{2} > 0$ とおく。

このとき ${}^\exists N_1, N_2$ s.t. $|a_n-a| < \dfrac{a-b}{2}$, $|b_n-b| < \dfrac{a-b}{2}$

このとき, $b_n < \dfrac{a+b}{2} < a_n$ となり, 矛盾。



prop $\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n \leq c_n \leq b_n,$

$$a_n \to a,\quad b_n \to a \quad (n \to \infty)$$

$$\Rightarrow \quad c_n \to a \quad (n \to \infty)$$

(∵) $\forall \varepsilon > 0$, 取る. 仮定から. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$

s.t. $\forall n \geqq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$\forall n \geqq N_2 \Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon$.

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと. $\forall n \geqq N$ に対して

$|a_n - a| < \varepsilon$ かつ $|b_n - a| < \varepsilon$ となり

従って $-\varepsilon < a_n - a \leqq c_n - a \leqq b_n - a < \varepsilon$

$\therefore\quad |c_n - a| < \varepsilon \quad \square$

(ex) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ は収束する

(∵)

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$+ \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad \cdots (*)$$

同様に

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

より, $a_n < a_{n+1}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$

また, $a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. $2^{k-1} \leq k!$ より

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 3 \quad \square$$

Def $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(ex) $b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ とおくと，

$b_n > a_n$ であり，$b_n \to e$ $(n\to\infty)$

(∵) $p\in\mathbb{N}$; fix. $n>p$ とすると，

$$a_n > 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

(注：$p+1$ 番目の項より先を取った.)

ここで，$n\to\infty$ とすると．左辺 $\to e$，右辺 $\to b_p$ より．

$e \geqq b_p$. 従って $e\geqq b_p > a_p$.

はさみうちの原理より．$b_p \to e$ $(p\to\infty)$ □

(ex) $a_n \to a \ (n\to\infty)$ のとき,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \to a \ (n\to\infty)$$

(∵) ${}^\forall\varepsilon>0$, fix. ${}^\exists N_1\in\mathbb{N}$, s.t. $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ ({}^\forall n\geqq N_1)$,

$N:=\max\left\{\left[\dfrac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1\cdot a|}{\frac{\varepsilon}{2}}\right]+1,\ N_1+1\right\}$ とする。

${}^\forall n\geqq N$ に対し,

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| =$$

$$=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}-\frac{na}{n}\right|$$

$$<\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1a}{n}\right|+\frac{|a_{N_1+1}-a|+|a_{N_1+2}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}$$

$$<\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1\cdot a|}{N}+\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cdot(n-N)}{n}$$

$$<\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1a|}{\dfrac{|a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1a|}{\frac{\varepsilon}{2}}}+\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{N}{n}\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \square$$

○ Bolzano - Weierstrass の定理

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の項の一部を取り出し，順序を変えずに並べてできる数列を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列という

$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ を用いて

$a_{n_1}, \ a_{n_2}, \ a_{n_3}, \ \cdots, \ a_{n_k}, \ \cdots$ と表すことができる。

Thm 有界な数列 $(\exists M\in\mathbb{R}, \ \forall n\in\mathbb{N}, \ |a_n| < M)$ は収束部分列を持つ

(証) $p_1 \leq a_n \leq q_1 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$ とする。

$I_1 = [p_1, q_1]$ を中点 $\dfrac{p_1+q_1}{2}$ で分け，$\{a_n\}$ の項を無限個含む方の区間をひとつとり，$I_2 = [p_2, q_2]$ とする

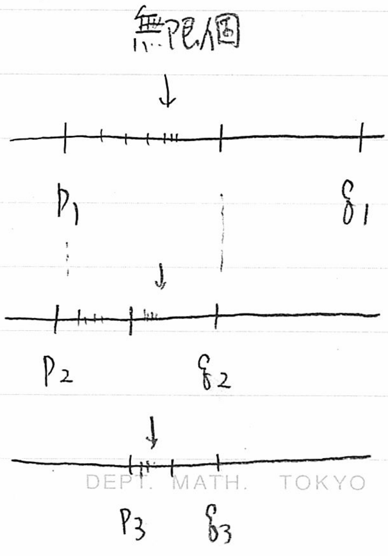
次に I_2 を再び中点で分け

$\{a_n\}$ の項を無限個含む区間を1つ取り，

$I_3 = [p_3, q_3]$ とする。以下，これを繰り返して

閉区間の列 $I_n = [p_n, q_n]$ を

作る。



$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ より

$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \cdots \leq p_n \leq \cdots \leq q_n \leq \cdots \leq q_2 \leq q_1$

よって $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ は有界な単調列であるから

$^{\exists}\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s.t. $p_n \to \alpha$, $q_n \to \beta$ $(n \to \infty)$

I_{n+1} の長さは I_n の長さの半分より

$$q_n - p_n = \frac{q_1 - p_1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (q_n - p_n) = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

ここで, $a_{n_1} \in I_1$ を任意に取る. I_2 は無限個の項を

含むので, $^{\exists} n_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $(n_1 < n_2) \wedge (a_{n_2} \in I_2)$.

これを続けて, $a_{n_k} \in I_k$ を満たす $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ が取れ, これは $\{a_n\}$ の部分列。

$p_k \leq a_{n_k} \leq q_k$ より はさみうちの原理から

$a_{n_k} \to \alpha$, 収束する部分列を得る. □

<u>Thm</u> Cauchy列 $\Leftrightarrow$ 収束列

(∵) ($\Rightarrow$) $\varepsilon = 1$ とすると, ${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$, ${}^{\forall}m, {}^{\forall}n \geq N$

$\Rightarrow |a_m - a_n| < 1$

特に $|a_N - a_n| < 1$ なので,

∴ $|a_n| < 1 + |a_N|$ より $\{a_n \mid n \geq N\}$ は有界列

∴ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は有界列である。

Bolzano - Weierstrass の定理から

収束する部分列 $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在し,

$a_{n_k} \to \alpha \ (k \to \infty)$.

${}^{\forall}\varepsilon > 0$, 取る. $\{a_n\}$: Cauchy列 より

${}^{\exists}N_1 \in \mathbb{N}$, ${}^{\forall}m \in \mathbb{N}$, ${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq N_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

次に, $a_{n_k} \to \alpha \ (k \to \infty)$ より

${}^{\exists}l \in \mathbb{N}$, s.t. $n_l > N_1$,

$|a_{n_l} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

よって ${}^{\forall}m \geq N_1$ に対して

$$\begin{aligned} |a_m - \alpha| &= |(a_m - a_{n_l}) + (a_{n_l} - \alpha)| \\ &\leq |a_m - a_{n_l}| + |a_{n_l} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ $a_n \to \alpha$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ に対し

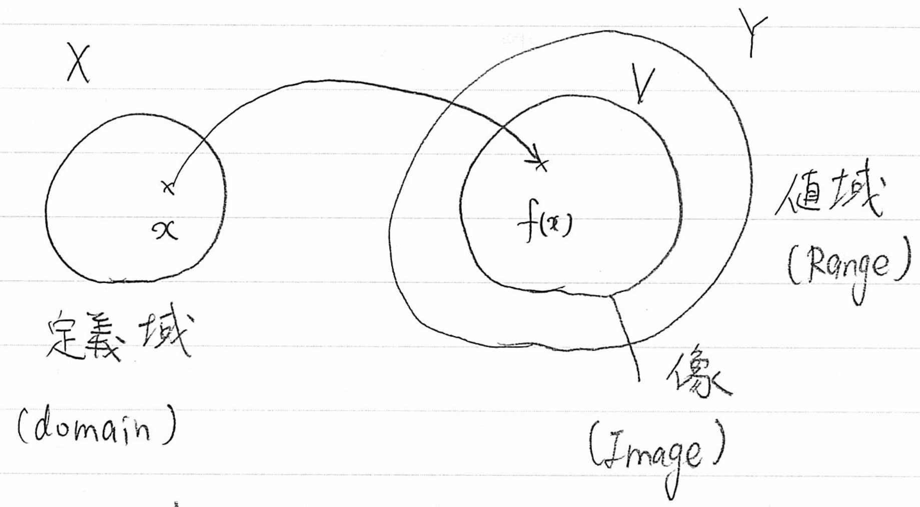
$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$

よって $\forall m, \forall n \geq N_\varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &= |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \\ &\leq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square\end{aligned}$$

§7 関数の極限

Def ある $x \in \mathbb{R}$ に対して，1つの $f(x) \in \mathbb{R}$ を対応させる規則 f を（1変数）関数という．



Def f；定義域 X，値域 Y のことを

$$f: X \to Y$$ と書く

(ex) "f は $x \in \mathbb{R}$ を $x^2 \in \mathbb{R}$ に対応させる" を

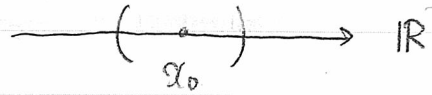
$$f: x \mapsto x^2, \quad f(x) = x^2$$ と書く．

(ex) $f(x) = x^3$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\cdot & & \cup\!\!\!\!\cdot \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\cdot & & \cup\!\!\!\!\cdot \\ x & \mapsto & f(x) = x^3 \end{array}$$

同じ表現

Def $V \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in V$; 開区間 を x_0 の開近傍 という



Def $f: D \to \mathbb{R}$ とする.

Dは, V; x_0の開近傍, $V\setminus\{x_0\} := \{x\in V \mid x\neq x_0\}$

$V\setminus\{x_0\}\subset D$ を満たすとする.

$x\to x_0$ $(x\neq x_0)$ のとき, xの近づけ方に依らず

$f(x)\to A$ となるならば,

$f(x)$ は $x\to x_0$ のとき収束して極限値 Aを持つという

すなわち, $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ or $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$

$\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathbb{R},$

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

Def $f(x)\to\infty$ $(x\to x_0)$

$\overset{def}{\iff} \exists x_0\in\mathbb{R},\ \forall K>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>K$$

Thm $f(x) \to A \ (x \to x_0)$

$\Leftrightarrow \ {}^\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \ x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \ ({}^\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \neq x_0)$

に対して, $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \to A$

($\Rightarrow$) $f(x) \to A \ (x \to x_0)$ と仮定する。

${}^\forall \varepsilon > 0, \ {}^\exists \delta > 0 \ {}^\forall x \in \mathbb{R},$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

今, $x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \ (x_n \neq x_0 \ ({}^\forall n \in \mathbb{N}))$

を満たす任意の数列を取る。この δ に対し,

${}^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$

よって $n \geqq N \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$. ゆえに,

$f(x_n) \to A \ (n \to \infty)$

($\Leftarrow$) ${}^\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \ x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \ (x_n \neq x_0 \ ({}^\forall n \in \mathbb{N}))$

に対して, $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \to A$ と仮定する.

背理法で示す。つまり, $f(x) \to A \ (x \to x_0)$

$\Leftrightarrow \ {}^\forall \varepsilon_0 \in \mathbb{R}, \ {}^\exists \delta > 0, \ {}^\forall x \in \mathbb{R},$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon_0$$

を否定する。つまり

$$^{\exists}\varepsilon_0 \in \mathbb{R},\quad ^{\forall}\delta > 0,\quad ^{\exists}x \in \mathbb{R},$$

$$(0 < |x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - A| \geqq \varepsilon_0)$$

と仮定する。

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\delta = \frac{1}{n}$ とすると、仮定から

$$^{\exists}x_n \in \mathbb{R}.\ \left(0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}\right) \wedge \left(|f(x_n) - A| \geqq \varepsilon_0\right).$$

となる数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。

$\frac{1}{n} \to 0$ より、$x_n \to x_0\ (n \to \infty)$ となるから、

仮定より $f(x_n) \to A\ (n \to \infty)$ だが、$|f(x_n) - A| \geqq \varepsilon_0$

に矛盾。□

§8 関数の連続性

$f : D \to \mathbb{R}$ とする。ここで,

$D \supset V$ (V; x_0 の近傍) を満たすとする.

このとき,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(f(x) \to f(x_0) \ (x \to x_0) \right)$$

であるならば, $f(x)$ は $x = x_0$ で連続であるという。

i.e., ${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists \delta > 0,\ {}^\forall x \in \mathbb{R}$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

<u>Thm</u> より

$$f(x) \to f(x_0) \quad (x \to x_0)$$

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$,

に対して $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$

となる.

(ex) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & (x \neq 2) \\ 4 & (x = 2) \end{cases}$, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続。

${}^\forall \varepsilon > 0,\ {}^\exists \delta > 0,\ {}^\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - 2| < \delta = |f(x) - f(2)| < \varepsilon$"

<u>Thm</u>（中間値の定理）

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, 連続, $f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow$ $f(a)$ と $f(b)$ の間の ${}^\forall k \in \mathbb{R}$ に対して, $\left(\begin{array}{c} f(a) < k < f(b) \\ f(b) < k < f(a) \end{array} \right)$

${}^\exists c \in [a, b]$, $f(c) = k$.

(∵) $f(a) < f(b)$ と仮定する。$f(a) < k < f(b)$ に対して

$Y := \{ x \in [a, b] \mid f(x) \leq k \}$ とおくと, $Y \neq \phi$.

$Y \subset [a, b]$ より, 上に有界な集合であるから

${}^\exists c \in [a, b]$, $c = \sup Y$. sup の定義より

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in Y$ で

$c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$ となるものが存在する。

$x_n \to c \ (n \to \infty)$ より. <u>Thm</u> より $f(x_n) \to f(c)$

今, $x_n \in Y$ より, $f(x_n) < k$, $({}^\forall n \in \mathbb{N})$. なので. prop より

$f(c) \leq k$, 従って. $f(a) < k < f(b)$ より. $c < b$.

今. $f(c) < k$ とすると, f が $x = c$ で連続より,

$\varepsilon_1 := \frac{k - f(c)}{2} > 0$ に対して. ${}^\exists \delta_1 > 0$.

$|x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon_1 = \frac{k - f(c)}{2}$

$\therefore \quad c-\delta_1 < x < c+\delta_1 \ (< b)$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(c) < \frac{k - f(c)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) < f(c) + \frac{k - f(c)}{2}$$

$$= \frac{k + f(c)}{2} < \frac{k+k}{2} = k.$$

$\therefore \quad c < x < c+\delta_1 \Rightarrow f(x) < k$ となり，

$c = \sup Y \ (Y := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq k\})$ に矛盾。

$\therefore \ f(c) = k$ 。 $f(a) > f(b)$ の場合も同様である。$\square$

Thm（最大値・最小値の定理）

$I=[a,b]$ 上連続な関数 f は、I 上で最大値、最小値を取る。

(☺) 最大値の存在のみを示す。

Step1 f の像 $Y := \{f(x) \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$ は上に有界である。

(☺) 背理法で示す。Y が上に有界でないと仮定すると、$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists y_n \in Y$ s.t. $y_n \geq n$.

$y_n \in Y$ より、$\exists x_n \in [a,b], \ y_n = f(x_n)$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ より、Thm から

$\exists \{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \ x_{n_j} \to c \in [a,b]$

このとき、$n_j \leq y_{n_j} = f(x_{n_j})$ だが、$j \to \infty$ のとき

$n_j \to +\infty$、すなわち $f(x_{n_j}) \to +\infty$ となるのに対し、

Thm から $f(x_{n_j}) \to f(c) < \infty$ となり、矛盾。

従って、Y は上に有界である。

Step 2 Axiom より. $^\exists \eta := \sup Y$, prop より

(i) $^\forall x \in [a, b]$ に対して. $f(x) \leq \eta$

(ii) $^\forall n \in \mathbb{N}$, $^\exists \widetilde{y_n} \in Y$, $^\exists \widetilde{x_n} \in [a, b]$

$$\eta - \frac{1}{n} < \widetilde{y_n} = f(\widetilde{x_n}) \leq \eta$$

$\{\widetilde{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ より. Thm から $^\exists \{\widetilde{x_{n_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\widetilde{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\widetilde{x_{n_j}} \to \tilde{c} \in [a, b]$, このとき Thm から.

$f(\widetilde{x_{n_j}}) \to f(\tilde{c})$ であり

はさみうち

$$\eta - \frac{1}{n_j} < f(\widetilde{x_{n_j}}) < \eta \quad \text{から. prop より}$$

$$f(\widetilde{x_{n_j}}) \to \eta \quad \therefore \quad f(\tilde{c}) = \lim_{n\to\infty} f(\widetilde{x_{n_j}}) = \eta$$

となり. このことは f が $c \in [a, b]$ で最大値 η を取ることを示している. 最小値も同様. $\square$

<u>prop</u> $f: D \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in D$ で連続で,

$f(x_0) \neq 0$ とする. このとき, $^\exists \delta > 0$ s.t. $^\forall x \in \mathbb{R}$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \neq 0$$

(∵) $\varepsilon := \dfrac{|f(x_0)|}{2} > 0$ とする。 f は x_0 で連続なので, $^\exists \delta > 0$

s.t. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$

$$\therefore\ |f(x_0)| - |f(x)| < \frac{|f(x_0)|}{2}$$

$$\therefore\ 0 < \frac{|f(x_0)|}{2} < |f(x)|$$ //

<u>Def</u> (一様連続) $f: D \to \mathbb{R}$ が D 上一様連続

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists \delta > 0$, $^\forall x \in D$, $^\forall y \in D$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(注) 連続と一様連続の違い

連続: $^\forall x_0 \in D$, $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists \underbrace{\delta > 0}_{x_0\text{に依存}}$, $^\forall x \in D$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

一様連続: $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists \underbrace{\delta > 0}_{D\text{上の全ての点で共通の値}}$, $^\forall x \in D$, $^\forall y \in D$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

<u>Def</u> (Lipschitz 連続, Hölder 連続)

$f : D \to \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ とする.

有界閉区間 $I \subset D$ に対し, $^{\exists} M_I \in \mathbb{R}$ s.t. $^{\forall} x \in I$, $^{\forall} y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leqq M_I |x - y|^{\alpha}$$

のとき, f は α-Hölder 連続

という. $\alpha = 1$ のとき Lipschitz 連続であるという.

i.e., $^{\exists} M_I \in \mathbb{R}$ s.t. $^{\forall} x \in I$, $^{\forall} y \in I$

$$|f(x) - f(y)| \leqq M_I |x - y| \text{//}$$

(ex) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ が $\mathbb{R}$ 上連続

(◯) MEMO $x_0 \in \mathbb{R}$ とする.

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2|$$

$$= |x - x_0| |x + x_0|$$

$$\leqq |x - x_0| (|x| + |x_0|)$$

ここで, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x| - |x_0| < \delta$

$\Leftrightarrow |x| < \delta + |x_0|$

ここで $\delta \leqq 1$ とすれば

$|x| < 1 + |x_0|$

$\therefore$ $|x - x_0| (|x| + |x_0|) < |x - x_0| (2|x_0| + 1)$

$\delta \leqq \dfrac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}$ とすれば, $< \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1} \cdot (2|x_0| + 1) = \varepsilon$ //

MEMO $\left(\begin{array}{l} \delta = \min\{a, b\} \Rightarrow \delta \leq a \text{ かつ } \delta \leq b \\ N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow N \geq N_1 \text{ かつ } N \geq N_2 \end{array} \right)$

(◯) $\forall \varepsilon > 0$, ${}^{\exists}\delta := \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right)$ とおく。

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta$ のとき, $|x| - |x_0| < \delta$ であり

$|x| < \delta + |x_0| \leq 1 + |x_0|$ に注意すれば.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0||x + x_0| \\ &\leq |x - x_0|(|x| + |x_0|) \\ &< |x - x_0|(2|x_0| + 1) \\ &< \delta(2|x_0|+1) \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}(2|x_0|+1) = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

(ex) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続でない

i.e., ${}^{\exists}\varepsilon > 0$, ${}^{\forall}\delta > 0$, ${}^{\exists}x_1 \in \mathbb{R}$, ${}^{\exists}x_2 \in \mathbb{R}$,

$$(|x_1 - x_2| < \delta) \wedge (|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon)$$

${}^{\exists}\delta > 0$ に対して, ${}^{\exists}x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ s.t.

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2}, \quad |x_1 + x_2| > \frac{2}{\delta}.$$

従って. $|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| > 1$

よって. $\varepsilon = 1$ に対して, 証明された.

§9 微分法

Def $D \subset \mathbb{R}$, x_0 の両近傍を含むものとする。

$f: D \to \mathbb{R}$, f が $x_0 \in D$ で微分可能

$$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}} \quad {}^{\exists} f'(x_0) \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Thm $f: D \to \mathbb{R}$, f が $x_0 \in D$ で微分可能で, $f'(x_0) = c$

$\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}\phi : D \to \mathbb{R}$ s.t. ${}^{\forall} x \in D$ に対し,

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

かつ $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$

(☺) $(\Rightarrow)$ $\phi(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ とおくと,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right)$$

$$= f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

$(\Leftarrow)$ $$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= c + \frac{\phi(x)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \left(c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right) = c \quad \square$$

Cor $f: D \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in D$ で微分可能 $\Rightarrow x_0$ で連続

(∵) $|f(x) - f(x_0)| \leq |f'(x_0)|\,|x - x_0| + |\phi(x)|$

$x \to x_0$ とすると，$\phi(x) \to 0$ より はさみうちの原理より

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ □

Def $f: D \to \mathbb{R}$, ${}^{\exists}\varepsilon > 0$, ${}^{\forall}y \in D$

$|y - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(y) \geqq f(x_0)$ $\left(\text{or } f(y) \leqq f(x_0)\right)$

となるとき，f は $x_0 \in D$ で極大（極小）値を取るという．

(注) x_0 で f が D 上での最小値を取る

$\Leftrightarrow$ $f(x_0) = \inf\{f(x) \mid x \in D\}$

Thm $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ は x_0 で微分可能で，x_0 で

極小 (or 極大) 値を取る関数とする．

このとき，$f'(x_0) = 0$

(☺) 極小値の場合を考える。(極大の場合は符号を逆にする。)

$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\forall y \in D,\ |y - x_0| < \varepsilon \Rightarrow f(y) \geqq f(x_0)$

$y = x_0 + h$ と書くとき，$h < 0$ であれば，

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqq 0 \quad \therefore f'(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqq 0$$

$h > 0$ であれば

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqq 0 \quad \therefore f'(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqq 0$$

従って，$f'(x_0) \leqq 0$ かつ $f'(x_0) \geqq 0$ より，$f'(x_0) = 0$ □

<u>Thm</u> (Rolle の定理)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$；連続，$(a, b)$ 上微分可能とする。

$f(a) = f(b) \Rightarrow {}^\exists x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $f'(x_0) = 0$

(☺) f が定数の時は明らか。f が定数でないとき，

$^\exists x_1 \in \mathbb{R}$ s.t. $\underbrace{f(x_1) > f(a) = f(b)}_{①}$ or, $\underbrace{f(x_1) < f(a) = f(b)}_{②}$

① と仮定して一般性を失わない。このとき，

f は $[a, b]$ 上最大値を取るので，$^\exists x_0 \in [a, b]$ s.t.

$f(x_0) \geqq f(x_1) > f(a) = f(b)$，従って，

$x_0 \neq a, b$ より $x_0 \in (a, b)$。f は (a, b) 上微分可能なので，

$f'(x_0) = 0$ 　(注) 極大値 $\Leftarrow$ 最大値)

Thm (第2平均値の定理)

$f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$; 連続, (a, b) 上微分可能とする。

$g(b) \neq g(a)$, ${}^\forall x \in (a, b)$ に対し, $g'(x) \neq 0$ とする。

このとき, $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

(∵) $$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

とおくと, $F(a) = 0 = F(b)$ なので, Rolleの定理から,

${}^\exists x_0 \in (a, b)$ s.t. $$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x_0)$$

$$\therefore \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad \square$$

ここで, $g(x) = x$ とおくと, $g(b) = b \neq a = g(a)$, $g' \equiv 1 \neq 0$

であり, 次の第1平均値の定理を得る。

Thm (第1平均値の定理)

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$; 連続, (a, b) 上微分可能とする。

このとき, ${}^\exists x_0 \in (a, b)$ s.t. $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

<u>Cor</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$；連続，(a,b)上 微分可能 とする．

$$\mu \leqq f'(x) \leqq m \quad ({}^{\forall}x\in(a,b))$$ を満たすとき，

$a\leqq x_1\leqq x_2\leqq b$ に対し，第1平均値の定理から

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x) \quad ({}^{\exists}x\in(x_1,x_2))$$

従って．

$$\mu \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq m$$

$$\therefore\ \mu(x_2-x_1) \leqq f(x_2)-f(x_1) \leqq m(x_2-x_1)$$

$M := \max\{|\mu|, |m|\}$ とおくと，

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqq M|x_2-x_1|$$

特に，$f'\equiv 0 \Leftrightarrow M=0$ より　$f\equiv c$ (定数)

Cor $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; 連続, (a,b) 上微分可能とする.

$\exists\gamma\in\mathbb{R}$ s.t. $f'(x)\equiv\gamma$ のとき,

$\exists C\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall x\in[a,b]$ に対し, $f(x)=\gamma x+C$

(∵) $F(x):=f(x)-\gamma x$ とおくと,

$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能

となる。更に, (a,b) 上で

$F'(x)=f'(x)-\gamma=\gamma-\gamma\equiv 0$ より $F'(x)\equiv 0$

従って, $\exists C\in\mathbb{R}$ s.t. $F(x)\equiv C$

すなわち, $C=f(x)-\gamma x$ $\therefore$ $f(x)=\gamma x+C$ □

<u>Cor</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; 連続, (a,b) 上微分可能とする.

$\exists \gamma\in\mathbb{R}$ s.t. $f'(x)=\gamma f(x)$ とするとき,

$$f(x)=f(0)e^{\gamma x}\quad(\forall x\in\mathbb{R})$$

(∵) $F(x):=f(x)e^{-\gamma x}$ とおく。このとき

F は $[a,b]$ 上連続で, (a,b) 上微分可能なので,

$$F'(x)=f'(x)e^{-\gamma x}+f(x)\cdot(-\gamma)\cdot e^{-\gamma x}$$

$$=\gamma f(x)e^{-\gamma x}-\gamma f(x)e^{-\gamma x}\equiv 0$$

よって, $F(x)\equiv C$. ∴ $f(x)e^{-\gamma x}=C$

∴ $f(x)=Ce^{-\gamma x}$

一方, $F(x)\equiv F(0)=f(0)=C$ より

$$f(x)=f(0)e^{-\gamma x}$$ //

Prop $f:[a,b]\to\mathbb{R}$；微分可能，

$^\exists\gamma\in\mathbb{R}$ s.t. $^\forall x\in[a,b]$, $|f'(x)|\leq\gamma|f(x)|$. とする.

このとき, $^\exists x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x_0)=0\Rightarrow[a,b]$上 $f\equiv0$.

(∵) $\gamma>0$ として良い。($\gamma=0$ のときは $f'(x)=0$ より. $f\equiv C\equiv f(x_0)=0$)

$\delta:=\dfrac{1}{2\gamma}$ とおく.

$x_1\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b]=:I$ を,

$$|f(x_1)|=\sup_{x\in I}|f(x)|$$ となるように取る。

このような x_1 は, 最大値, 最小値の定理から存在する.

$$|f(x_1)|=|f(x_1)-\underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}}|\underset{\text{第1平均値の定理}}{\underset{\uparrow}{\leq}}|x_1-x_0|\sup_{\xi\in I}|f'(\xi)|$$

$$\leq\gamma|x_1-x_0|\sup_{\xi\in I}|f(\xi)|\leq\gamma\delta|f(x_1)|=\frac{1}{2}|f(x_1)|$$

$\therefore$ $f(x_1)=0$ よって, $^\forall x\in I$, $f(x)=0$。

もし, $[a,b]$上 f が恒等的に 0 でないと仮定すると,

$^\exists\xi_1\in\mathbb{R}$ s.t. $f(\xi_1)=0$ となる最小の ξ_1 $(a<\xi_1\leq b)$

または, $^\exists\xi_2\in\mathbb{R}$ s.t. $f(\xi_2)=0$ となる最大の ξ_2 $(a\leq\xi_2<b)$

よって, x_0 を ξ_1 または ξ_2 におきかえ, 再度上の議論を

繰り返すと, 最大, 最小に矛盾。 □

Cor $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; Lipschitz 連続, $c \in \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$

とする。$\begin{cases} f'(x) = \phi(f(x)) & (\forall x \in [a, b]) \\ f(a) = c \end{cases}$

という方程式の解 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は、高々1つしか存在しない。

(実は、Picard - Lindelöf の定理によって
　　　ピカール　　リンデレーフ

$\exists h > 0$, $\exists f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$

$\begin{cases} f'(x) = \phi(f(x)) & \forall x \in [a, a+h] \\ f(a) = c \end{cases}$

となり、$x = a$ から $x = a+h$ の間は方程式の解が存在する。)

(∵) f_1, f_2 を $f_1(a) = f_2(a) = c$ となる解とする。

$F(x) := f_1(x) - f_2(x)$ は、$F(a) = 0$ を満たす。

f_1, f_2 は連続ゆえ、$f_1([a, b]), f_2([a, b])$ は、

最大値・最小値の定理、及び中間値の定理から

有界閉区間である。

$$|F'(x)| = |f_1'(x) - f_2'(x)| = |\phi(f_1(x)) - \phi(f_2(x))|$$
$$\leq L|f_1(x) - f_2(x)| = L|F(x)|$$

よって $F(a) = 0$ より、$F \equiv 0$. i.e., $f_1(x) \equiv f_2(x)$ □

○ Taylorの定理

$f : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ (or. $f : [x, x_0] \to \mathbb{R}$, x_0とxの大小関係で分ければよい。),

fが$[x_0, x]$上でn階連続微分可能

$\left(\Longleftrightarrow f^{(i)}(y)\text{ が }[x_0, x]\text{ 上連続 } (0 \leq i \leq n) \right)$

かつ$(n+1)$階微分可能 (注: $f^{(n+1)}(y)$に連続性は仮定していない)

とする。このとき、$\exists\, \xi \in [x_0, x]$ s.t.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1} \quad //$$

(☺) $f(x) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)(x - x_0)^\nu + \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} z$

とする$z \in \mathbb{R}$を取る。

ここで、$\varphi(y) := f(x) - \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(y)(x - y)^\nu$

$$- \frac{1}{(n+1)!}(x - y)^{n+1} z$$

とおくと、$\varphi(y)$は$[x_0, x]$で連続。

(😊) $f, g : [x_0, x]$: 連続のとき $f+g$ もまた連続である.

今, 今 $f^{(\nu)}(y)$ $(0 \leq \nu \leq n)$ が連続と仮定しているので

$\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(y)(x-y)^{\nu}$ も連続になる。□

また, $\varphi(y)$ は (x_0, x) で微分可能である.

(😊) f が $(n+1)$ 回微分可能なため,

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(y)(x-y)^{\nu}$$

$$= f^{(0)}(y) + f^{(1)}(y)(x-y) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(y)(x-y)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(y)(x-y)^n$$

は微分可能である. □

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x)(x-x)^{\nu} - \frac{1}{(n+1)!}(x-x)^{n+1} z$$

$$= f(x) - f(x) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x) \cdot 0\right) - 0$$

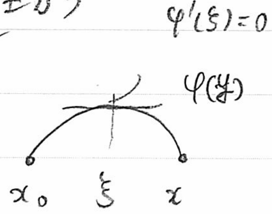
$= 0$ であり, $z \in \mathbb{R}$ の取り方から

$$\varphi(x_0) = f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^{\nu}$$

$$- \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} Z = 0$$

よって, $\varphi(x) = 0 = \varphi(x_0)$ より. Rolle の定理から

$\exists \xi \in (x_0, x)$ s.t. $\varphi'(\xi) = 0$.



ここで,

$$\varphi'(y) = \frac{d}{dy}\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{定数}} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(y)(x-y)^{\nu}$$

$$- \frac{1}{(n+1)!}(x-y)^{n+1} \cdot Z\Big)$$

$$= -\sum_{\nu=0}^{n} \frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(y)(x-y)^{\nu}\Big)$$

$$- \frac{1}{n!}(x-y)^{n} \cdot (-1) \cdot Z$$

$$= \underbrace{-f'(y)}_{\nu=0\text{の微分}} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu!}\Big(f^{(\nu+1)}(y)(x-y)^{\nu} - f^{(\nu)}(y)\,\nu\cdot(x-y)^{\nu-1}\Big)$$

$$+ \frac{1}{n!}(x-y)^{n} Z$$

$$= -f'(y) - \sum_{\nu=1}^{n}\Big(\frac{1}{\nu!} f^{(\nu+1)}(y)(x-y)^{\nu} - \frac{1}{(\nu-1)!} f^{(\nu)}(y)\cdot(x-y)^{\nu-1}\Big)$$

$$+ \frac{1}{n!}(x-y)^{n} \cdot Z$$

$$= -\cancel{f'(y)} - \Bigg(\frac{1}{1!} \cancel{f^{(2)}(y)(x-y)} - \cancel{f^{(1)}(y)}$$

$$+ \frac{1}{2!} \cancel{f^{(3)}(y)(x-y)^2} - \frac{1}{1!} \cancel{f^{(2)}(y)(x-y)}$$

$$+ \frac{1}{3!} \cancel{f^{(4)}(y)(x-y)^3} - \frac{1}{2!} \cancel{f^{(3)}(y)(x-y)^2}$$

$$+ \quad \vdots \qquad - \quad \vdots$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(y)(x-y)^n - \frac{1}{(n-1)!} \cancel{f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1}} \Bigg)$$

$$+ \frac{1}{n!} (x-y)^n \cdot z$$

$$\therefore \quad \varphi'(y) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(y)(x-y)^n + \frac{1}{n!}(x-y)^n \cdot z$$

$\varphi'(\xi) = 0$ より

$$\varphi'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n + \frac{1}{n!}(x-\xi)^n \cdot z = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\cancel{n!}} f^{(n+1)}(\xi) \cancel{(x-\xi)^n} = \frac{1}{\cancel{n!}} \cancel{(x-\xi)^n} \cdot z$$

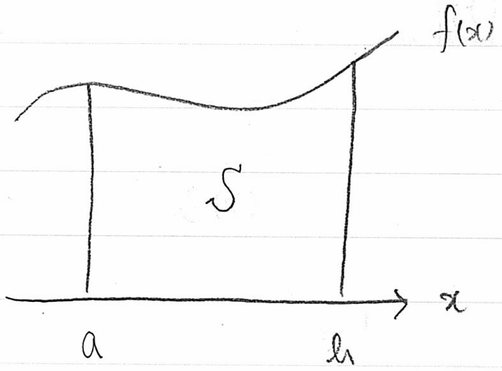
$(n+1)$階微分可能なので、このような

$$\therefore \quad z = f^{(n+1)}(\xi)$$ より　z は存在する

以上から、

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)(x-x_0)^\nu + \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \quad // \quad \square$$

§10 積分法



$$\Rightarrow \quad S = \int_a^b f(x)\,dx$$

は，本来と順序が逆。

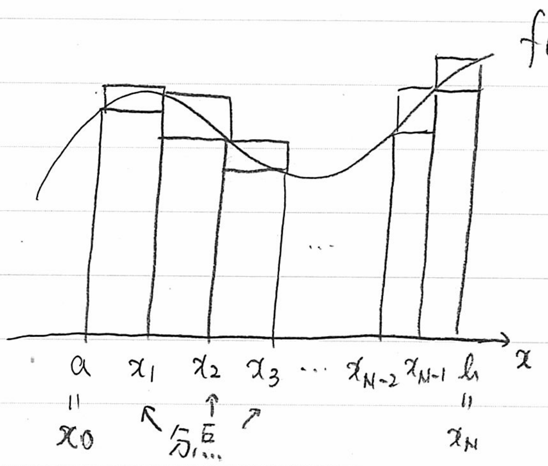
<u>Def</u> 分割

$-\infty < a < b < \infty$ とする．

数列 $\{x_k\}_{k=0}^{N} \subset \mathbb{R}$ が $[a, b]$ の分割

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$

を満たす。分割を Δ と書く．



$$D[a, b] := \left\{ \{x_k\}_{k=0}^{N} \;\middle|\; [a, b] \text{ の分割} \right\}$$

<u>Def</u> ${}^{\forall}\{x_k\}_{k=0}^{N} \in D[a, b]$ に対して，

$$|\Delta| := \sup \left\{ |x_k - x_{k-1}| \;\middle|\; k = 1, 2, \cdots, N \right\}$$

で定める。$|\Delta|$ を分割の幅という

<u>Def</u> $I = [a, b]$ の幅を $|I| := b - a$ と書く。

$\{x_k\}_{k=0}^{N} \in D[a,b]$ に対し,

$I_k := [x_{k-1}, x_k]$ とおくと, $|I_k| = x_k - x_{k-1}$,

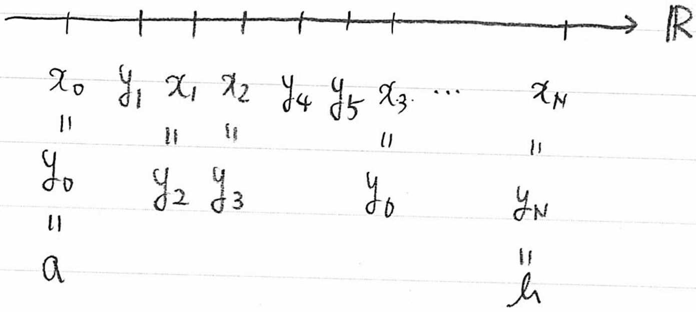
$$|I| = \sum_{k=1}^{N} |I_k| = b - a$$

<u>Def</u> $\Delta'; \{y_k\}_{k=0}^{M} \in D[a,b]$ が, $\Delta; \{x_k\}_{k=0}^{N} \in D[a,b]$

の細分 $\underset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\{y_k\}_{k=0}^{M} \supset \{x_k\}_{k=0}^{N}$

このことを $\Delta' \ll \Delta$ と書く

このとき, $|\Delta'| \le |\Delta|$。



<u>Def</u> $\Delta_1; \{x_k\}_{k=0}^{N} \in D[a,b]$

$\Delta_2; \{y_k\}_{k=0}^{M} \in D[a,b]$ とする。

このとき, $\Delta_3; \{z_k\}_{k=0}^{L} \in D[a,b]$ が Δ_1, Δ_2 の共通細分

$\underset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\Delta_3 \ll \Delta_1$ かつ $\Delta_3 \ll \Delta_2$

Def $\Delta ; \{x_k\}_{k=0}^{N} \in D[a,b]$ とする.

$\forall \{\xi_k\}_{k=1}^{N} \subset \mathbb{R}$, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ に対し,

$$S_f[\Delta ; \{\xi_k\}_{k=1}^{N}] = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$ を

f の Riemann 和という.

Def $\Delta ; \{x_k\}_{k=0}^{N} \in D[a,b]$ に対して,

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \cdot \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

$$s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

とする. $S_\Delta(f)$ を上限和, $s_\Delta(f)$ を下限和という.

(注) $\sup_{x \in M} f(x) := \sup\{ f(x) \mid x \in M \}$

$\forall \Delta \in D[a,b]$ に対し,

$$(b-a) \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \leq s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f) \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

より, Riemann 上積分 $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\Delta \in D[a,b]} S_\Delta(f)$

Riemann 下積分 $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{\Delta \in D[a,b]} s_\Delta(f)$ が存在する.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = J$$ のとき

$\int_a^b f(x)\,dx = J$ で f の $[a, b]$ 上のリーマン積分を定める.

<u>Prop</u> $f:[a,b] \to [-M, M]$,

$\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{N} \in D[a,b]$.

Δに1つ分点yを加えて，$\Delta^* = \Delta \cup \{y\} \in D[a,b]$

とする．このとき

$$S_{\Delta^*}(f) \leqq S_\Delta(f) \leqq S_{\Delta^*}(f) + 2|\Delta| M$$

(∵) $x_{k-1} < y < x_k$ とする．

$S_\Delta(f) - S_{\Delta^*}(f)$

$$= (y - x_{k-1}) \left(\sup_{x_{k-1} \leqq z \leqq x_k} f(z) - \sup_{x_{k-1} \leqq z \leqq y} f(z) \right)$$

$$+ (x_k - y) \left(\sup_{x_{k-1} \leqq z \leqq x_k} f(z) - \sup_{y \leqq z \leqq x_k} f(z) \right).$$

従って．$|f(z)| \leqq M$ より

$$\begin{aligned} S_\Delta(f) - S_{\Delta^*}(f) &\leqq (y - x_{k-1})(M - (-M)) \\ &\quad + (x_k - y)(M - (-M)) \\ &= 2(x_k - x_{k-1}) M \\ &\leqq 2|\Delta| M \end{aligned}$$

D

Thm Darbouxの定理（積分）

$^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し、$^{\exists}\delta > 0$, $^{\forall}|\Delta| < \delta$ のとき、

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S_\Delta(f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

(∵) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\Delta \in D[a,b]} S_\Delta(f)$ より

$^{\forall}\varepsilon > 0$ に対し、$^{\exists}\Delta_0 : \{y_k\}_{k=0}^{N} \in D[a,b]$ s.t.

$$S_{\Delta_0}(f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\varepsilon$$

ここで、

$$K := \min_{1 \leq k \leq N} |y_k - y_{k-1}|$$

$$M := \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

とおく。$M > 0$ のとき、Δ で

$$|\Delta| < \delta := \min\left\{K, \frac{\varepsilon}{5MN}\right\}$$ を満たすものを

取ると、

Δ, Δ_0 の分割を合併した $\Delta_0^* := \Delta \cup \Delta_0 \in D[a,b]$

に対して、$\Delta_0^* \ll \Delta$, $\Delta_0^* \ll \Delta_0$ より

$$S_{\Delta_0}(f) \geq S_{\Delta_0^*}(f), \quad S_{\Delta}(f) \geq S_{\Delta_0^*}(f)$$

が成り立つ。

更に、$|\Delta| < \delta \leq \kappa$ より、Δ_0^* の分点のうち

Δ にない分点は高々 N 個。

よって prop を N 回、$|\Delta| \leq \delta$ を用いて

$$S_\Delta(f) - S_{\Delta_0^*}(f) \leq 2M \times N \times \delta$$
$$\leq 2MN \cdot \frac{\varepsilon}{5MN} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

従って、

$$\begin{cases} S_{\Delta_0^*}(f) \leq S_{\Delta_0}(f) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{1}{2}\varepsilon \\ S_\Delta(f) \leq S_{\Delta_0^*}(f) + \frac{1}{2}\varepsilon \end{cases}$$ より

$$\therefore S_\Delta(f) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$ //

Thm $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 連続 $\Rightarrow$ $f:[a,b]$ 上一様連続

(☺) 背理法, $^{\exists}\varepsilon_0>0$, $^{\forall}\delta>0$, $^{\exists}x\in[a,b]$, $^{\exists}x'\in[a,b]$ s.t.

$(|x-x'|<\delta)\wedge(|f(x')-f(x)|\geqq\varepsilon_0)$ と仮定する.

$\delta=\dfrac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$ とする。n に対する x, x' を

x_n, x_n' とすると, $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ という有界数列が出来る.

Bolzano - Weierstrass の定理から

$^{\exists}\{x_{n_k}\}$: 部分列 s.t. $x_{n_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$.

$x_0\in I$ であり,

$$|x_{n_k}'-x_0|\leqq|x_{n_k}'-x_{n_k}|+|x_{n_k}-x_0|$$

$$<\frac{1}{n_k}+|x_{n_k}-x_0|\to 0 \text{ より}$$

$x_{n_k}'\to x_0$。

f は連続関数なので, $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ かつ

$f(x_{n_k}')\to f(x_0)$。

従って $f(x_{n_k}')-f(x_{n_k})\to 0$ だが,

$|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k})|\geqq\varepsilon_0$ に矛盾。□

Thm　$f : [a, b] \to [-M, M]$ がリーマン可積

$\iff$ $[a, b]$ の n 等分割 $\{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{n}$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \left(\sup_{x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}} f(x) - \inf_{x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}} f(x) \right) = 0$$

(∵) Darboux の定理より

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \left(\sup_{x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}} f(x) - \inf_{x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}} f(x) \right) \qquad \square$$

Thm　$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続なら f は Riemann 可積

(∵) $$\sum_{k=1}^{n} (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \left(\sup_{x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}} f(x) - \inf_{x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}} f(x) \right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} (x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \sup_{x, y \in [a,b],\ |x-y| \leq \frac{b-a}{n}} |f(x) - f(y)|$$

$$\leq (b-a) \sup_{x, y \in [a,b],\ |x-y| \leq \frac{b-a}{n}} |f(x) - f(y)|$$

f は $[a, b]$ 上一様連続なので, $^\forall \varepsilon > 0$ に対し $^\exists \delta > 0$

$^\forall x \in [a, b]$, $^\forall y \in [a, b]$, $|x-y| \leq \frac{b-a}{n} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

より, 右辺は 0 に収束。 $\square$

Def $F'(x) = f(x)$ となる関数 F を f の原始関数という

Thm f が $[a, b]$ 上可積，$[a, b]$ 上原始関数 F を持つならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \equiv F(b) - F(a)$$

(∵) $\Delta : \{x_k\}_{k=0}^N \in \mathcal{D}[a, b]$ とする．

第1平均値の定理より

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)\,\Delta x_k \quad , \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

よって

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} \big(F(x_k) - F(x_{k-1}) \big)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

$N \to \infty$ とすると．f は可積なので 右辺 $\to \int_a^b f(x)\,dx$ □

§9 関数列

区間 I 上で定義された関数の無限列

$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ を I 上の関数列といい、

$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ と書く

Def

I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が f に各点収束
（f：各点収束極限）

$$\Longleftrightarrow \ {}^{\forall}x\in I, \ \lim_{n\to\infty} |f(x)-f_n(x)| = 0$$

Def I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が f に I 上一様収束
（f：一様収束極限）

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon>0, \ {}^{\exists}N\in\mathbb{N}, \ {}^{\forall}n\in\mathbb{N}, \ {}^{\forall}x\in I,$$

$$n\geqq N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

(ex) $f_n(x) = \cos x + \dfrac{\sin x}{x^2+n}$ は $\cos x$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束

(∵) $$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\cos x+\frac{\sin x}{x^2+n}-\cos x\right| \leqq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin x}{x^2+n}\right| \leqq \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty) \ \square$$

Thm $I=[a,b]$ 上連続な関数列の一様収束極限 f は連続

(証) $\forall x_0 \in I$, fix。$\forall \varepsilon > 0$ に対し f に一様収束するので、

$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$。

f_N : 連続 ゆえ、$\exists \delta > 0$, $\forall x \in I$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

よって、$\forall x \in I$ に対して、$|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \square$$

Thm　$I = [a, b]$ 上の連続な関数列 $\{f_n(x)\}$ が

I 上 f に一様収束

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

(∵) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f$ は Thm より連続 $\Rightarrow$ Riemann 可積

f が I 上一様収束より

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,$

$$n \geqq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

従って

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leqq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon \quad \square$$