# 解析学入門 レポート問題

＿＿組＿＿番＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1〜2 は必答問題．問題 3 以降は，好きなものを最低 3 問は選び，最終授業時に提出すること．（テキスト，ネット，相談など，調べ方は自由）（**注意：解答は A4 レポート用紙を用いること．全ての用紙について裏は使わない．提出時には表紙プリントを付け，クラス，番号，氏名を明記し，左上をホチキス止めして提出すること．**）

**問題 1.** 次の命題の真偽を判定せよ．

1. ${}^\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 0 \Rightarrow x^2 > 0)$.
2. ${}^\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 0 \Rightarrow x > 0)$.

**問題 2.** 次の命題 $P$ の否定を作れ．

$$P = {}^\forall \varepsilon > 0\ ({}^\exists N \in \mathbb{N}\ ({}^\forall n \in \mathbb{N}\ (n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon))).$$

**問題 3.** $X$：普遍集合，$S \subset X$，$T \subset X$ とする．次の命題を証明せよ．ただし，$S \cup S^c = X$，$S \cap S^c = \emptyset$ は既知の事実としてよい．（ヒント：補足プリント 2 を参照．ベン図を書くと状況はよくわかるであろう．）

1. $T \subset S \Rightarrow T^c \supset S^c$
2. $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$
3. $(S \cap T)^c = S^c \cup T^c$

**問題 4.** 次の写像は，単射か，全射か，全単射のいずれかである．どの性質を満たすかを調べよ．

1. $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]; x \mapsto f(x) = \cos x$
2. $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; x \mapsto f(x) = \cos x$
3. $f : \mathbb{R} \to \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]; x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

**問題 5.** $A \subset \mathbb{R}$，$A \neq \emptyset$ とする．$A$ の最大元 $\max A$ が存在するとき，$A$ の上限 $\sup A$ と一致することを証明せよ．すなわち，${}^{\exists}\max A \Rightarrow \max A = \sup A$.
（ヒント：$M$ が $A$ の最大限であれば，$M$ は $A$ の上限であることを示せばよい．すなわち，$M$ が $A$ の最大元であるとは，$M \in A$ であり，$\forall a \in A$ に対して，$a \leq M$ を満たすことをいう．一方，$\tilde{M}$ が $A$ の上限であるとは，$\forall a \in A$ に対して，$a \leq \tilde{M}$ を満たすことをいう．すなわち，$M$ も上限の定義を満たしている．）

**問題 6.** $A \subset \mathbb{R}$，$A \neq \emptyset$ とする．$A$ の最小元 $\min A$ が存在するとき，$A$ の下限 $\inf A$ と一致することを証明せよ．すなわち，${}^{\exists}\min A \Rightarrow \min A = \inf A$.
（ヒント：$m$ が $A$ の最小元であれば，$m$ は $A$ の下限であることを示せばよい．すなわち，$m$ が $A$ の最小元であるとは，$m \in A$ であり，$\forall a \in A$ に対して，$m \leq a$ を満たすことをいう．一方，$\tilde{m}$ が $A$ の下限であるとは，$\forall a \in A$ に対して，$\tilde{m} \leq a$ を満たすことをいう．すなわち，$m$ も上限の定義を満たしている．）

**問題 7.** 命題 5 の証明の行間をきちんと埋めよ．加筆すべき点は以下である．
$B \subset \mathbb{R}$ が下に有界と仮定すると，$L(B) \neq \emptyset$．このとき，$-B := \{-x \mid x \in B\}$ は上に有界である．（ヒント：$U(-B) \neq \emptyset$ を示せばよい．もし $U(-B)$ の元 $x$ を $L(B)$ の元を用いて表すことができれば，$L(B) \neq \emptyset$ から $U(-B) \neq \emptyset$ が言える．）

**問題 8.**

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

とする．このとき，数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は狭義単調増加数列であることを示せ．すなわち，任意の自然数 $n$ に対して，$a_n < a_{n+1}$ が成り立つことを示せ．（ヒント：$n = 1$ のときは具体的に計算すればよい．$n \geq 2$ のとき，$a_n$ と $a_{n+1}$ を二項展開した後に出てくる第 3 項以降の各項について比較すればよい．）

**問題 9.**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n + (-1)^n} = \frac{1}{2}$$

を数列の極限の収束の定義に基づき，証明せよ．すなわち，任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，次の命題

$$\text{任意の自然数 } n \text{ に対し,} n \geq N \text{ ならば} \left| \frac{n}{2n + (-1)^n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \text{である．}$$

が成り立つような自然数 $N$ の構成方法を述べ，上述の命題が成立することを述べよ．ただし，アルキメデスの原理は認めてよい．

**問題 10.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}=0$$

を数列の極限の収束の定義に基づき，証明せよ．ただし，アルキメデスの原理は認めてよい．

**問題 11.**

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\pi\right)=0$$

を証明せよ．但し，挟み撃ちの原理などの講義中に証明した事実や，不等式 $\sin x\leq x$ は用いてよい．
(ヒント：フィボナッチ数列の一般項を，初項と第 2 項をうまく選んで計算せよ.)

**問題 12.** $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とする．数列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が，$p_n>0$ ($^\forall n\in\mathbb{N}$)，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}p_k=\infty$ を満たすとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\alpha$$

を証明せよ．(ヒント：講義の証明を工夫せよ.)

**問題 13.** 任意の実数 $a$，$b$ に対して，不等式 $|a+b|\leq|a|+|b|$ が成り立つことを証明せよ．（ヒント：両辺を 2 乗すれば，方針が立つ．$^\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow x\leq|x|$ を用いる.）

**問題 14.** 任意の実数 $a$，$b$ に対して，不等式 $||a|-|b||\leq|a-b|$ が成り立つことを証明せよ．（ヒント：$^\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|$ を用いる.）

**問題 15.** $f(x) \to -\infty \ (x \to x_0)$ を $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて定義せよ．

**問題 16.** $f(x) \to A \ (x \to -\infty)$ を $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて定義せよ．

**問題 17.** $I = [a, b]$ 上連続な関数 $f$ は，$I$ 上で最小値を取ることを証明せよ．（ヒント：講義でやった議論を，符号を変えて行えばよい.）

**問題 18.** 平均値の定理は，$f'$ の連続性を仮定していない．それは何故か考察せよ．（ヒント：*Rolle* の定理が局所的な議論であったことを思い出そう.）

**問題 19.** $f$ は $[0, 1]$ 上 *Riemann* 積分可能な関数で，$|f(t)| \leq M \ ({}^\forall t \in [0, 1])$ を満たすとする．$[0, 1]$ 上の関数 $F$ を $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ で定義する．この時，$F(x)$ が $[0, 1]$ 上連続になることを証明せよ．

**問題 20.** $[0, 1]$ 上定義された関数 $f$ を，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が無理数，または } 0 \text{ のとき }) \\ \dfrac{1}{m} & (x \text{ が有理数のとき，但し，} m \text{ は } x \text{ を } x = \dfrac{n}{m} \text{ と既約分数で表した時の分母 }) \end{cases}$$

で定める．このとき，$f$ は $[0, 1]$ 上 *Riemann* 積分可能であることを証明せよ．