マスター・オブ・積分

○ 部分積分法

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

○ 置換積分法

$x = \varphi(t)$ とおくとき, φ が微分可能で, $\varphi'(t)$ が連続であれば:

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

○ 基本的な関数の不定積分 (積分定数は省略)

(1) $\displaystyle\int x^{\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x|$

(2) $\displaystyle\int e^{x}\, dx = e^{x}$

$\displaystyle\int a^{x}\, dx = \frac{a^{x}}{\log a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

(3) $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x$

$\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x}$$

(4) $\displaystyle\int \log|x|\,dx = x\log|x| - x$

(∵) $\displaystyle\int \log|x|\,dx = \int (x)'\log|x|\,dx$

部分積分法により

$$\int (x)'\log|x|\,dx = x\log|x| - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\log|x| - x \,/\!/ \quad \square$$

(5) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$

(∵) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$= \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$$

ここで、 $\log|f(x)| = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ であったので

$$= -\log|\cos x| \,/\!/ \quad \square$$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

(∵)

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) \quad \text{より}$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\log|x-a| - \log|x+a|\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|_{\,/\!/} \quad \square.$$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| \qquad (a \neq 0)$

(∵)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}+1}{x+\sqrt{x^2+a}}$$

$$= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a}} \quad \text{より}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'}{x+\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|_{\,/\!/} \quad \square$$

(8) $$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)$$

$(a \neq 0)$

(証) $$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \int (x)'\sqrt{x^2+a}\,dx$$

部分積分法より

$$\int (x)'\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int\left(\sqrt{x^2+a} - \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}\,dx + a\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$$

(7) より

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int\sqrt{x^2+a}\,dx + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$

$$\therefore\ 2\int\sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$$

$$\therefore\ \int\sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|\right)_{//}\ \square$$

（注）高校の範囲ではないが…。

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$　$(-a \leqq x \leqq a)$ $(a>0)$

(☺) $\sin\theta = \sin(\theta + 2n\pi)$ (n: 整数)

より，$x = \sin\theta$ とすると $\theta = \sin^{-1}x$ は無限多価である．

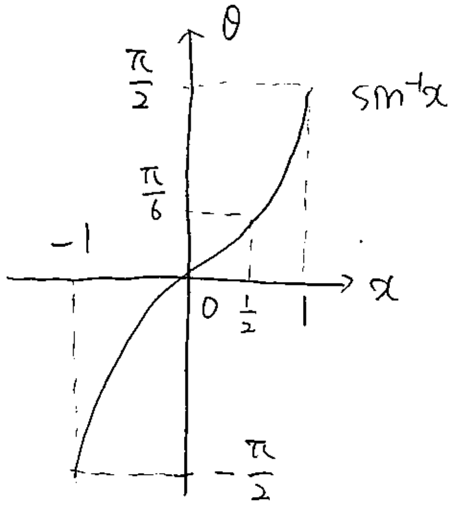
※ 1つの x に対して，1つ以上の値を与える関数を多価関数という。

$$\sin^{-1}x = \begin{cases} \theta + 2n\pi \\ (2n-1)\pi - \theta \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

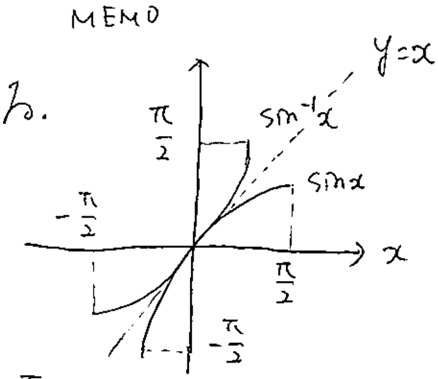
となるので，$\sin^{-1}x$ は無限個の値を表す．

しかし，$\theta = \sin^{-1}x$ は，値を $-\frac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \frac{\pi}{2}$ に制限すると，『区間 $a \leqq x \leqq b$ における単調増加 (or 減少) 関数 $f(x)$ が，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある値を全て取れば，$a \leqq x \leqq b$ 上連続である』という定理から，(1つの x に対して，1つの値を与える) 連続関数となる．
(※ 1つの x に対して，1つの値を与える関数を，一価関数という) この値 $\theta = \sin^{-1}x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ を，$\sin^{-1}x$ の主値という．

$\theta = \sin^{-1}x$ の主値は



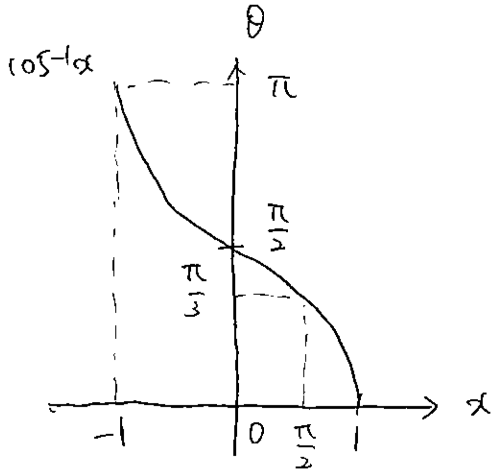
のようになる。



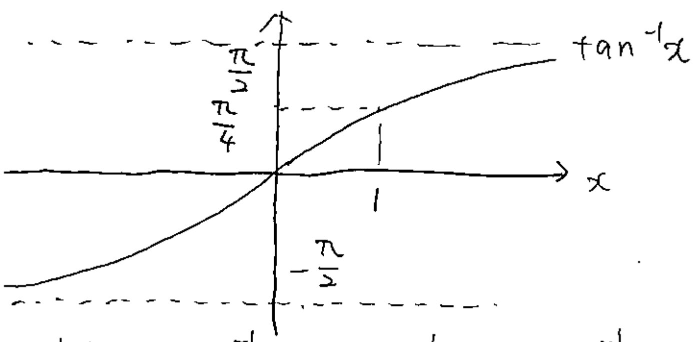
（要するに、$\sin^{-1}x$ の値域を $-\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ に制限すれば、通常の関数と同様に扱えるのである。）

以下、$\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ も同様に考えると、

$\theta = \cos^{-1}x$ の主値は、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ であり



$\theta = \tan^{-1}x$ の主値は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり



$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2}$$

である。

以下、$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ は主値を取るものとする。

$\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明しよう

$y = \sin^{-1}x$ とおくと $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$

$\therefore\ x = \sin y$ （yは主値とする。すなわち，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$）

$\therefore\ \dfrac{dx}{dy} = \cos y$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$

注（$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$ だが，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos y \geqq 0$）

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}}$

$\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ //

更に $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ を証明しよう。

合成関数の微分法により

$t = t(x) = \dfrac{x}{a}$ とおくと

$\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}t(x) = \dfrac{d}{dt}\sin^{-1}t \cdot \dfrac{dt}{dx}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} \cdot \dfrac{1}{a}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ // （注；$a>0$）

以上より $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ が示された。□

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

(☺) $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$ を証明しよう。

$y = \tan^{-1}x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると、y は $\tan^{-1}x$ の

主値であるので、$\tan^{-1}x$ は実数上定義される連続関数

である。$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x$ より

$x = \tan y$.

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)} = \frac{1}{1+x^2} \,//$$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$ となる。合成関数の微分法から

$\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\cdot\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a^2+x^2}$ となり

$\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ // □

(11) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$ $(a>0)$

(∵) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int (x)'\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

部分積分法により

$$\int (x)'\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-a^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$$

$$\therefore \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\therefore\quad 2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)_{//}$$

○ 不定積分の常套手段

(ex1)

○ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$= 2\cos^2 x - 1$ より

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \;/\!/$$

○ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$ より

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \;/\!/$$

を利用して、

(12) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\int 1\, dx - \int \cos 2x\, dx\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \;/\!/$

(13) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$ //

(ex2)

$\displaystyle\int x(x^2+1)^{\alpha}\,dx$ について

$u = x^2+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 2x$ $\therefore$ $dx = \dfrac{1}{2x}\,du$

従って

$$\int x(x^2+1)^{\alpha}\,dx = \int x\cdot u^{\alpha}\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int u^{\alpha}\,du$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \dfrac{1}{2}\log|u| & (\alpha = -1) \end{cases}$$

よって

(14) $$\int x(x^2+1)^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2(\alpha+1)}(x^2+1)^{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) & (\alpha = -1) \end{cases}$$

(注) $|x^2+1| = (x^2+1)$

$(\because\ x^2+1 \geqq 1 > 0)$

$\int (\cos x)^{\alpha} \sin x \, dx$ について

$u = \cos x$ とおくと、 $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$

$\therefore dx = -\dfrac{1}{\sin x} du$

従って

$$\int (\cos x)^{\alpha} \sin x \, dx$$

$$= \int u^{\alpha} \cdot \sin x \cdot -\frac{1}{\sin x} du = -\int u^{\alpha} dx$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ -\log|u| & (\alpha = -1) \end{cases}$$

よって

(15) $$\int (\cos x)^{\alpha} \sin x \, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha+1} (\cos x)^{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ -\log|\cos x| & (\alpha = -1) \end{cases}$$

(ex3) ○ $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$, $J = \int e^{ax} \sin bx \, dx$

$(a^2 + b^2 \neq 0)$ を求めよ.

(i) $a \neq 0$ のとき. 部分積分法により

$$I = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \cos bx \, dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx \, dx$$

$$\therefore \quad aI = e^{ax}\cos bx + bJ \quad \cdots ①$$

$$J = \int \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx \, dx$$

$$\therefore \quad aJ = e^{ax}\sin bx - bI \quad \cdots ②$$

これを I, J について解く.

① $\Longleftrightarrow$ $I = \dfrac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \dfrac{b}{a}J$ より, ②に代入して

$$aJ = e^{ax}\sin bx - b\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}J\right)$$

$$\therefore \quad J\left(a + \frac{b^2}{a}\right) = e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}e^{ax}\cos bx$$

$$\therefore \quad J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

同様に,

② $\Longleftrightarrow$ $J = \dfrac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \dfrac{b}{a}I$ より ①に代入して

$$aJ = e^{ax}\cos hx + h\left(\frac{1}{a}e^{ax}\sin hx - \frac{h}{a}I\right)$$

$$\therefore\ I\left(a + \frac{h^2}{a}\right) = e^{ax}\cos hx + \frac{h}{a}e^{ax}\sin hx$$

$$\therefore\ I = \frac{e^{ax}}{a^2+h^2}(a\cos hx + h\sin hx)$$

よってまとめると

$$(16)\ \begin{cases} I = \dfrac{e^{ax}}{a^2+h^2}(a\cos hx + h\sin hx) \\ J = \dfrac{e^{ax}}{a^2+h^2}(-h\cos hx + a\sin hx) \end{cases}$$ //

○ $I = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$, $J = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx$

をすめる.

$$I + J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int 1\,dx = x$$

$$I - J = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{-(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}dx$$

$$= -\log|\sin x + \cos x|$$ より

$$(17)\ \begin{cases} I = \dfrac{1}{2}(x - \log|\sin x + \cos x|) \\ J = \dfrac{1}{2}(x + \log|\sin x + \cos x|) \end{cases}$$ //

○ 漸化式を用いた不定積分の求め方

(ex1) $I_m = \int \frac{1}{(x^2+A)^m}\,dx \quad (A \neq 0)$ とおくと,

$m \neq 1$ のとき,

(17) $I_m = \frac{1}{2A(m-1)} \left\{ \frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + (2m-3) I_{m-1} \right\}$

が成り立つ

(∵) $$I_m = \int \frac{1}{(x^2+A)^m}\,dx$$

$$= \frac{1}{A} \int \frac{(x^2+A) - x^2}{(x^2+A)^m}\,dx$$

$$= \frac{1}{A} \left(\int \frac{1}{(x^2+A)^{m-1}}\,dx - \int \frac{1}{2} x \cdot \frac{2x}{(x^2+A)^m}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{A} I_{m-1} - \frac{1}{2A} \int x \cdot \left\{ (x^2+A)^{-m} \cdot \underbrace{2x}_{(x^2+A)'} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{A} I_{m-1} - \frac{1}{2A} \int x \cdot \left(\frac{1}{-m+1} (x^2+A)^{-m+1} \right)' dx$$

部分積分より, $$= \frac{1}{A} I_{m-1} - \frac{1}{2A} \left\{ -\frac{1}{m-1} \frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + \int \frac{1}{m-1} \frac{1}{(x^2+A)^{m-1}}\,dx \right\}$$

$$= \frac{1}{A} I_{m-1} + \frac{1}{2A(m-1)} \frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} - \frac{1}{2A(m-1)} \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+A)^{m-1}}\,dx}_{I_{m-1}}$$

$$\therefore \quad I_m = \frac{1}{2A(m-1)}\left\{\frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right\} \quad \square$$

I_1 については $\quad I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+A}\,dx$ より，(6), (10) から

$$I_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| & (A=-a^2<0 \text{ のとき}) \\[2ex] \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} & (A=a^2>0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

従って，(17) を用いて，I_1 から順に $I_2, I_3 \cdots$ が順次求められる．

(ex2) $\quad I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$ とおくと．

$n \neq 0$ のとき．

(18) $\quad I_n = \dfrac{1}{n}\left\{-\cos x \sin^{n-1}x + (n-1)I_{n-2}\right\}$

($\because$) $n \geqq 2$ のとき，

$$I_n = \int \sin^n x\,dx$$

$$= \int \sin^{n-1}x \cdot \sin x\,dx$$

$$= \int \sin^{n-1}x \cdot (-\cos x)'\,dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1}x + \int (n-1)\sin^{n-2}x \cdot \cos x \cdot \cos x\,dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1}x + (n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\left\{\int \sin^{n-2} x\,dx - \int \sin^n x\,dx\right\}$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$$

$$\therefore \quad n I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n}\left\{-\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}\right\} \quad (n \geqq 2)$$

となる. $n=1$ のとき, $I_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x$ であり,

代入して $I_1 = \frac{1}{1}\cdot\left\{-\cos x \cdot + 0 \circ \int \frac{1}{\sin x}\,dx\right\}$

$= -\cos x$ より. 成立.

従って. $n \geqq 1$ のとき

$I_n = \frac{1}{n}\left\{-\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}\right\}$ // を得る。□

○ 有理関数の不定積分

二つの多項式 $P(x)$, $Q(x)$ の比で表される

関数 $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ を, 有理関数と呼ぶ。

$Q(x)$ を $P(x)$ で割ったときの商を $g(x)$, 余りを $Q_0(x)$

とすると. $Q(x) = g(x)P(x) + Q_0(x)$ (Q_0 の次数 < P の次数)

であり，よって $f(x) = g(x) + \dfrac{Q_0(x)}{P(x)}$ となる.

よって，有理関数の不定積分は，

(19) $$h(x) = \frac{Q_0(x)}{P(x)} \quad (Q_0\text{の次数} < P\text{の次数})$$

なる形の有理関数の不定積分に帰着される。

一般に，多項式 $P(x)$ は相異なる一次式と実数解を持たない二次式によって，

$$P(x) = a(x+\alpha_1)^{m_1}(x+\alpha_2)^{m_2}\cdots(x+\alpha_p)^{m_p} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}\cdot(x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{n_2}\cdots(x^2+\beta_q x+\gamma_q)^{n_q}$$

と積の形に因数分解(実数の範囲で)される。

ここで，係数 $a, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$
$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$
$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_q$ は全て実数で，2次方程式の判別式より $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0 \quad (k=1,2,\cdots,q)$.

このとき，(19) の有理関数 $h(x) = \dfrac{Q_0(x)}{P(x)}$ は，

$$(20)\quad h(x) = \sum_{k=1}^{p}\left\{\sum_{l=1}^{m_k}\frac{A_{k,l}}{(x+a_k)^l}\right\} + \sum_{k=1}^{q}\left\{\sum_{l=1}^{n_k}\frac{B_{k,l}\cdot x + C_{k,l}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^l}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{A_{k,1}}{(x+a_k)} + \frac{A_{k,2}}{(x+a_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k,m_k}}{(x+a_k)^{m_k}}\right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{q}\left(\frac{B_{k,1}x + C_{k,1}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)} + \frac{B_{k,2}x + C_{k,2}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^2} + \cdots + \frac{B_{k,n_k}x + C_{k,n_k}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{n_k}}\right)$$

なる形に分解されることが知られている。※ ((注) $A_{k,l}$，$B_{k,l}$，$C_{k,l}$ は定数である。)

これを部分分数分解という。　※証明は長くなるので割合する。

したがって，$f(x)$ の不定積分は，次の形の不定積分に帰着される。

$$(21)\quad \int \frac{1}{(x+\alpha)^n}\,dx$$

$$(22)\quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx \qquad (\beta^2-4\gamma<0)$$

(21) の積分はすぐに出来る。

(22) の積分については，次のように分けて計算する。

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \frac{\frac{B}{2}\cdot 2x + \frac{B\beta}{2} - \frac{B\beta}{2} + C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$$

従って

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$$

$$= \frac{B}{2}\int\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx + \left(C-\frac{B\beta}{2}\right)\int\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$$

となり. $\displaystyle\int\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$ について,

$u = x^2+\beta x+\gamma$ とおくと.

$\dfrac{du}{dx} = 2x+\beta \quad \therefore \quad dx = \dfrac{1}{2x+\beta}\,du$ となり

$$\int\frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx = \int\frac{2x+\beta}{u^n}\cdot\frac{1}{2x+\beta}\,du$$

$$= \int\frac{1}{u^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{-n+1}u^{-n+1} & (n>1) \\ \log|u| & (n=1) \end{cases}$$

ここで, $x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma$ ($\because\ \beta^2-4\gamma<0$)

$> -\frac{1}{4}(\beta^2-4\gamma) > 0$ より $u>0$.

従って、

$$\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{n-1}} & (n>1) \\ \log(x^2+\beta x+\gamma) & (n=1) \end{cases}$$

また、$\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$ について、

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \int \frac{1}{\left\{(x+\frac{\beta}{2})^2+\frac{1}{4}(4\gamma-\beta^2)\right\}^n}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\left\{(x+\frac{\beta}{2})^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\gamma-\beta^2}\right)^2\right\}^n}\,dx$$

ここで、 $u = x+\dfrac{\beta}{2}$ とおくと $du = dx$ より

$$\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx = \int \frac{1}{(u^2+A)^n}\,du = I_n \text{ とおける。}$$

(但し $A = a^2 > 0$, $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{4\gamma-\beta^2}$)

よって、漸化式 (18)

$$\begin{cases} I_n = \dfrac{1}{2A(n-1)}\left\{\dfrac{x}{(x^2+A)^{n-1}} + (2n-3)\,I_{n-1}\right\} & (n>1) \\ I_1 = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} & (\because (10)) \end{cases}$$

によって、積分を計算することが出来る。

(ex1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$ を計算する

(20)より, $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ から, 部分分数分解は

次の形になる.

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

両辺に x^3+1 を掛けると

$$\begin{aligned}
1 &= A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \\
&= Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + (B+C)x + C \\
&= (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C
\end{aligned}$$

両辺の係数を比較して,

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -A+B+C = 0 \\ A+C = 1 \end{cases}$$

これを解いて, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$

となる。よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-x+1}\,dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\left(\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx - \int \frac{3}{x^2-x+1}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\left(\log(x^2-x+1) - 3\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\tan^{-1}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \quad \cdots(答)$$

(ex2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$ を求めよ。

(20) より、$\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

と部分分数分解できるので

両辺に $(x-1)^2(x^2+1)$ を掛けて、

$$1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$= A(x^3-x^2+x-1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-2x+1)$$

$$= A(x^3-x^2+x-1) + B(x^2+1) + Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx+D$$

$$\therefore\ 1 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A+C-2D)x + (-A+B+D)$$

よって．両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} A \quad\quad +C \quad\quad = 0 \\ -A+B-2C+D = 0 \\ A \quad\quad +C -2D = 0 \\ -A+B \quad\quad +D = 1 \end{cases}$$

これを解くと，　$A = -\frac{1}{2}$，$B = C = \frac{1}{2}$，$D = 0$ となる．

よって，

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\log(x^2+1) \quad \cdots(答)$$

(注)　係数 A, B, C, D を求めるとき

$1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$ で，

$x=1$ を代入すると，　$2B = 1$　$\therefore B = \frac{1}{2}$

$x=i$ を代入すると，　$(Ci+D)(i-1)^2 = 1$

$$\therefore\ (Ci+D)\cdot -2i-1=0$$

$$\therefore\ (2C-1)+(-2D)i=0$$

$$\therefore \begin{cases} 2C-1=0 \\ -2D=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} C=\frac{1}{2} \\ D=0 \end{cases}$$

$x=0$ を代入すると

$$1=A\cdot(-1)\cdot 1+B+D\cdot(-1)^2$$

$$\therefore 1=-A+\frac{1}{2} \quad \therefore A=-\frac{1}{2}$$

となり. $A=\frac{1}{2}$, $B=C=\frac{1}{2}$, $D=0$ と簡単に求めることが出来る。

(ex3) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

(分子の次数)>(分母の次数) より

x^5+x^4-8 を x^3-4x で割って,

MEMO

$$\begin{array}{r} x^2+x+4 \\ x^3-4x\,\overline{)\,x^5+x^4\qquad\qquad-8} \\ \underline{x^5\quad-4x^3\qquad\quad} \\ x^4+4x^3\qquad\quad \\ \underline{x^4\quad-4x^2\quad} \\ +4x^3+4x^2\quad \\ \underline{4x^3\quad-16x} \\ 4x^2+16x-8 \end{array}$$

$$x^5+x^4-8$$

$$=(x^2+x+4)(x^3-4x)+4x^2+16x-8 \text{ より,}$$

$$\therefore \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$$

を得る。

ここで $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ について

$x^3-4x = x(x-2)(x+2)$ より (20) から

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

となる。両辺に x^3-4x を掛けると

$$4x^2+16x+8 = A(x-2)(x+2)+B\cdot x(x+2)+Cx(x-2).$$

ここで，$x=0$ を代入すると，$-8=-4A \quad \therefore A=2$

$x=2$ を代入すると，$4\cdot 2^2+16\cdot 2-8 = B\cdot 2\cdot 4$

$\therefore \quad 40 = 8B \quad \therefore B=5$

$x=-2$ を代入すると．$4\cdot(-2)^2+16\cdot(-2)-8 = C\cdot(-2)\cdot(-4)$

$\therefore \quad -24 = 8C \quad \therefore C=-3$

$$\therefore \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}+\frac{-3}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\log|x|+5\log|x-2|-3\log|x+2|$$

$$= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\log\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| \,/\!/ \quad \cdots(答)$$

○ 三角関数

$R(X, Y)$ を, X と Y の有理関数, すなわち,
2変数 X, Y の多項式の商として表される関数
とするとき, $R(\cos x, \sin x)$ の積分は,
有理関数の積分に帰着される。

$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

全ての三角関数の有理式の問題で使える変数変換

(∵)

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$
$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$
$$= 2\left(\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) - 1$$
$$= \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$$
$$= 2\tan\frac{x}{2}\left(\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1+t^2}{2} \quad \therefore\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \quad //$$

よって $\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \times \frac{2}{1+t^2}\,dt$ //

(ex1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ を求める.

$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t|$$

$$= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad //$$

。 $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\tan x$ の有理式になっているときは,

$\tan x =$ t とおく方が, 計算が簡単に出来る.

(ex2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

$\tan x =$ t とおくと,

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$ である.

(∵) $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$

$\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\tan^2 x}} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x = 1+t^2$

$\therefore\ dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$ □

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1+t^2}{t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\tan x}$$ //

○ $R(\cos x, \sin x)$ を変形し、

$$R(\cos x, \sin x) = R_c(\cos^2 x, \sin x)\cdot\cos x$$

の形に出来るとき（$\cos x$ がくくり出せるとき）

$\sin x = t$ とおくと

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R_c(\cos^2 x, \sin x)\cdot\cos x\,dx$$

$$= \int R_c(1-t^2, t)\,dt$$ となる。

(ex3) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$.

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x \, (1-\sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

と表せるので，$\sin x = t$ とおくと．

$$\frac{dt}{dx} = \cos x \quad \therefore \quad dx = \frac{1}{\cos x} dt \quad \text{より}$$

$$\int \sin^3 x \, (1-\sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int t^3 (1-t^2) \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} dt$$

$$= \int t^3 dt - \int t^5 dt$$

$$= \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{6} t^6 = \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x$$

○ $R(\cos x, \sin x)$ を変形して

$$R(\cos x, \sin x) = R_s(\cos x, \sin^2 x) \cdot \sin x$$

の形に出来るとき，（$\sin x$ がくくり出せるとき）

$\cos x = t$ とおくと．

$$\int R(\cos x, \sin x) \, dx = \int R_s(\cos x, \sin^2 x) \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int R_s(t, 1-t^2) \, dt \quad \text{となる．}$$

(ex3)′ $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^3 x \cdot \sin x \, dx$$

と表せるので, $\cos x = t$ とおくと,

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x \quad \therefore \quad dx = \frac{-1}{\sin x} dt \quad \text{より}$$

$$\int (1-\cos^2 x)\cos^3 x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int (1-t^2)t^3 \cdot \sin x \cdot \frac{-1}{\sin x} dt$$

$$= \int t^5 dt - \int t^3 dt$$

$$= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{6}\cos^6 x - \frac{1}{4}\cos^4 x$$ //

(注) (ex3), (ex3)′ 共に, $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$ を計算したが, 変数変換によって一見すると答えが異なるように見える。しかし,

$$-\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x = -\frac{1}{4}(1-\sin^2 x)^2 + \frac{1}{6}(1-\sin^2 x)^3$$

$$= \cdots (\text{中略}) \cdots = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x$$

となり, 定数 $-\frac{1}{12}$ の差しかないことが分かる.

○ $I(m,n)=\int (\sin x)^{m}\cdot(\cos x)^{n}\,dx$ の漸化式

（m, nは整数とする。）

(23) $$I(m,n)=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{m-1}}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$$

（但し、$m+n\neq 0$）

(24) $$I(m,n)=-\frac{(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)$$

（但し、$m+n\neq 0$）

(25) $$I(m,n)=-\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}I(m,n+2)$$

（但し、$n\neq -1$）

(26) $$I(m,n)=\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{m+1}}{m+1}+\frac{m+n+2}{m+1}I(m+2,n)$$

（但し、$m\neq -1$）　　が成立する。

m, nが正の整数のときは、(23), (24) を何回か用い、負の整数のときは (25), (26) を何回か用いると、不定積分は $I(-1,-1)$, $I(-1,0)$, $I(-1,1)$, $I(0,-1)$, $I(0,0)$, $I(0,1)$, $I(1,-1)$, $I(1,0)$, $I(1,1)$ の9個の場合に帰着させられる。（証明はひとまず省略）

○ 無理関数の積分法

$R(X,Y)$ を，X と Y の有理関数とする。

次のような無理関数（$\sqrt{P(x)}$ が含まれる関数）は，

置換積分を行うことによって，次の有理関数の積分に

帰着できる。

○ $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ $(a \neq 0)$ と表されるとき，

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ に対して，$\sqrt[n]{ax+b} = t$ とおくと，

$$x = \frac{1}{a}(t^n - b) \text{ より，}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{n}{a}t^{n-1} \quad \therefore \quad dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt \text{ より}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$$

$$= \int R\left(\frac{1}{a}(t^n - b), t\right) \cdot \frac{n}{a}t^{n-1} \cdot dt$$

○ $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $(ad-bc\neq 0)$ と表されるとき,

$\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ に対して, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$ とおくと,

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n \quad \therefore \quad ax+b = t^n(cx+d)$$

$$\therefore \quad (a-ct^n)x = dt^n - b$$

$$\therefore \quad x = \frac{dt^n-b}{a-ct^n}$$

従って $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{ndt^{n-1}(a-ct^n) - (dt^n-b)\cdot -cnt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$

$$= \frac{nadt^{n-1} - ncdt^{2n-1} + ncdt^{2n-1} - nbct^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$$

$$= \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$$

$$\therefore \quad dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt \quad \text{より}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\cdot \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt \quad //$$

○ $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ $(D = b^2-4ac \neq 0,\ a \neq 0)$

と表されるとき,

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ に対して,

(i) $a>0$ の場合, $\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x = t$ とおくと,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t-\sqrt{a}\,x$$

$$\therefore\ ax^2+bx+c = (t-\sqrt{a}\,x)^2$$

$$= t^2-2\sqrt{a}\,tx+ax^2$$

$$\therefore\ bx+c = t^2-2\sqrt{a}\,tx$$

$$\therefore\ (b+2\sqrt{a}\,t)x = t^2-c$$

$$\therefore\ x = \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t},$$ 従って

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(b+2\sqrt{a}\,t)-(t^2-c)\cdot 2\sqrt{a}}{(b+2\sqrt{a}\,t)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}\,t^2+2bt+2\sqrt{a}\,c}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2} \quad \therefore\ dx = \frac{2\sqrt{a}\,t^2+2bt+2\sqrt{a}\,c}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$$ より

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t},\ t\right)\cdot \frac{2\sqrt{a}\,t^2+2bt+2\sqrt{a}\,c}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$$

(ii) $a<0$, $D>0$ の場合

((注) $a<0$, $D<0$ のとき. $ax^2+bx+c<0$ より. $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ は実数値関数ではなくなってしまう。)

$ax^2+bx+c=0$ の異なる実数解を α, β とすると,

$ax^2+bx+c = -a(x-\alpha)(\beta-x)$,

$\alpha<\beta$ と仮定して一般性を失わない。 $\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}} = t$ とおくと,

$$\frac{x-\alpha}{\beta-x} = t^2 \quad \therefore \quad x-\alpha = t^2(\beta-x)$$

$$\therefore \quad (1+t^2)x = \alpha+\beta t^2$$

$$\therefore \quad x = \frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\beta t(1+t^2)-(\alpha+\beta t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2\beta t+2\beta t^3-2\alpha t-2\beta t^3}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)^2} \quad \therefore \quad dx = \frac{2(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)^2}\,dt \text{ より}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

$$= \int R\left(\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2}, t\right)\frac{2(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)^2}\,dt \quad //$$

○ $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ $(a>0)$ と表されるとき,

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ に対して,

$x = a\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$\frac{dx}{dt} = a\cos t$ $\therefore$ $dx = a\cos t\,dt$, より

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = a|\cos t| = a\cos t$ より

$$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$$
$$= \int R(a\sin t, a\cos t)\cdot a\cos t\,dt$$

三角関数の積分法により, $\tan\frac{t}{2} = s$ とおくと

$$\int R(a\sin t, a\cos t)\cdot a\cos t\,dt$$
$$= \int R\left(a\cdot\frac{2s}{1+s^2}, a\cdot\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)\cdot a\cdot\frac{1-s^2}{1+s^2}\cdot\frac{2}{1+s^2}\,ds$$
$$= \int R\left(\frac{2as}{1+s^2}, \frac{a(1-s^2)}{1+s^2}\right)\cdot\frac{2a(1-s^2)}{(1+s^2)^2}\,ds$$

○ $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ $(a>0)$ と表される時、

$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ に対して、$x = \dfrac{a}{\cos t}$ $\left(0 \leqq t < \dfrac{\pi}{2},\ \pi \leqq t < \dfrac{3}{2}\pi\right)$

とおくと、$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}$ $\therefore$ $dx = \dfrac{a\tan t}{\cos t}\,dt$ 及び、

$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\dfrac{1}{\cos^2 t} - 1\right)} = a\,|\tan t| = a\tan t$

よって、

$$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$$

$$= \int R\left(\frac{a}{\cos t},\ a\tan t\right) \frac{a\tan t}{\cos t}\,dt$$

ここで、三角関数の積分法を用いて、$\tan\dfrac{t}{2} = s$ とおくと、

$$\int R\left(\frac{a}{\cos t},\ a\cdot\tan t\right) \frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \int R\left(\frac{a(1+s^2)}{1-s^2},\ \frac{2as}{1-s^2}\right) \frac{a(1+s^2)^2}{(1-s^2)^2} \cdot \frac{2s}{(1+s^2)} \cdot \frac{2}{(1+s^2)}\,ds$$

$$= \int R\left(\frac{a(1+s^2)}{1-s^2},\ \frac{2as}{1-s^2}\right) \frac{4as}{(1-s^2)^2}\,ds。$$

。$R(x, \sqrt{x^2+a^2})$ $(a>0)$ と表されるとき,

$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})\, dx$ に対して, $x = a\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$

とおくと, $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}$ $\therefore$ $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$, 及び,

$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\tan^2 t+1)} = a\frac{1}{|\cos t|} = \frac{a}{\cos t}$, より

$$\int R(x, \sqrt{x^2+a^2})\, dx$$

$$= \int R\left(a\tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

三角関数の積分法を用いて, $\tan\frac{t}{2} = s$ とおくと

$$\int R\left(a\tan t, \frac{a}{\cos t}\right) \frac{a}{\cos^2 t} dt$$

$$= \int R\left(\frac{2as}{1-s^2}, \frac{a(1+s^2)}{1-s^2}\right) \frac{a(1+s^2)^2}{(1-s^2)^2} \cdot \frac{2}{(1+s^2)} ds$$

$$= \int R\left(\frac{2as}{1-s^2}, \frac{a(1+s^2)}{1-s^2}\right) \frac{2a(1+s^2)}{(1-s^2)^2} ds_{\,//}$$

(ex1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$ を求めよ.

$\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} = t$ とおくと, $\dfrac{x+1}{x+2} = t^2$ $\therefore\ x = \dfrac{1}{1-t^2} - 2$ 。

$$\therefore\ x+3 = \frac{1}{1-t^2} + 1 = \frac{2-t^2}{1-t^2},$$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$ $\therefore\ dx = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt$ より,

$$\therefore \int \frac{1}{x+3}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx = \int \frac{2-t^2}{1-t^2}\cdot t\cdot \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{2t^2}{(2-t^2)(1-t^2)}\,dt$$

$$= 2\int \left(\frac{2}{t^2-2} - \frac{1}{t^2-1} \right) dt$$

$$= 2\left\{ \frac{2}{2\sqrt{2}} \log\left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{2}\log\left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right\}$$

$$= \sqrt{2}\log\left| \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + \sqrt{2}} \right| - \log\left| \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + 1} \right| \text{ 。}$$

(ex2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$\sqrt{x^2+2}+x=t$ とおくと，$x^2+2=t^2-2tx+x^2$

$$\therefore\ x=\frac{t^2-2}{2t},\quad \sqrt{x^2+2}=t-\frac{t^2-2}{2t}=\frac{t^2+2}{2t}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+2}{2t^2}\qquad \therefore\ dx=\frac{t^2+2}{2t^2}\,dt$$

$$\therefore\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx=\int\frac{2t}{t^2+2}\cdot\frac{t^2+2}{2t^2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\log|t|\quad=\log\left|\sqrt{x^2+2}+x\right| \,//$$

(ex3) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$

$2+x-x^2=(x+1)(2-x)$ であるから

$\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}=t$ とおくと，$x+1=(2-x)t^2 \quad \therefore\ x=\dfrac{2t^2-1}{t^2+1}$

$$x-1=\frac{2t^2-1}{t^2+1}-1=\frac{t^2-2}{t^2+1}.$$

$$dx=\frac{6t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$\sqrt{2+x-x^2}=(2-x)\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}=\left(2-\frac{2t^2-1}{t^2+1}\right)t=\frac{3t}{t^2+1}$$

$$\therefore\ \int\frac{1}{(x-1)\sqrt{2+x-x^2}}\,dx=\int\frac{t^2+1}{t^2-2}\cdot\frac{t^2+1}{3t}\cdot\frac{6t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2-2}\,dt$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\sqrt{2-x}}\right| 〃$$

(ex 4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx \qquad (a>0)$

$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ とおくと,

$\tan\theta > 0$ であり $\sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta$

$dx = a\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}\,d\theta$ ゆえ, 求める積分を I とすると,

$$I = \int \frac{1}{x^2(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{a\cdot\frac{1}{\cos\theta}\tan\theta}{a^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot a^3\tan^3\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{a^4\tan^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{a^4}\int \frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

ここで, $\sin\theta = t$ とおくと, $\cos\theta\,d\theta = dt$ より

$$I = \frac{1}{a^4}\int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{t}+t\right) = -\frac{1}{a^4}\left(\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ より, $\sin\theta$ と $x = \frac{a}{\cos\theta}$ は

同符号を持ち, $\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$ である.

従って,

$$I = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sin^2\theta + 1}{\sin\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\frac{x^2-a^2}{x^2} + 1}{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}\right)$$

$$= -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\left(2 - \frac{a^2}{x^2}\right)\cdot x^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

$$= -\frac{2x^2 - a^2}{a^4 x\sqrt{x^2-a^2}} \text{〃}$$

○ 指数関数，対数関数の積分法

$R(x)$ を，x に関する有理関数とする。

○ $R(e^x)$ と表されるとき，$e^x = t$ とおくと，

$\frac{dt}{dx} = e^x \quad \therefore \quad dx = \frac{1}{t}dt$ より

$\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{1}{t}\,dt$ となり，有理関数の積分に帰着できる。

○ $g(x)$ が有理関数で，$G(x) = \int g(x)\,dx$ も有理関数であるとき，

$$\int g(x)\log x\,dx = G(x)\log x - \int \frac{G(x)}{x}\,dx$$

となり，有理関数の積分に帰着できる。

(ex1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}-2e^{x}}\,dx$

$e^{x}=t$ とおくと, $x=\log t$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$ $\therefore dx=\dfrac{1}{t}dt$

$$\therefore \int \frac{1}{e^{2x}-2e^{x}}\,dx=\int \frac{1}{t^2-2t}\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\int \frac{dt}{t^2(t-2)}$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-2}{t}\right|+\frac{1}{2t}$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{e^{x}-2}{e^{x}}\right|+\frac{1}{2e^{x}}$$

(ex2) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^n}{x}\,dx$ $(n\neq -1)$

$\log x=t$ とおくと, $x=e^{t}$, $dx=e^{t}dt$

$$\therefore \int \frac{(\log x)^n}{x}\,dx=\int \frac{t^n}{e^t}\cdot e^t\,dt=\frac{1}{n+1}t^{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}$$

(ex3) $\displaystyle\int \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}\,dx$

$\log(1+x)=t$ とおくと $1+x=e^{t}$, $dx=e^{t}dt$

$$\therefore \int \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}\,dx=\int \frac{t}{e^{\frac{t}{2}}}e^{t}\,dt=\int t e^{\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= 2te^{\frac{t}{2}} - 2\int e^{\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= 2te^{\frac{t}{2}} - 4e^{\frac{t}{2}}$$

$$= 2\sqrt{1+x}\left\{\log(1+x) - 2\right\}$$ //

○ 無理関数の積分法（逆数置換法）

$x+a=\dfrac{1}{t}$ とおくと、計算が容易になる場合がある。

(ex 1) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}\,dx$$

$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと、 $dx=-\dfrac{1}{t^2}\,dt$

{ $\sqrt{t^2}=|t|$ を用いている }

また、 $$\sqrt{27x^2+6x-1} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{27+6t-t^2}}{t} & (t>0\text{ のとき}) \\ -\dfrac{\sqrt{27+6t-t^2}}{t} & (t<0\text{ のとき}) \end{cases}$$

(i) $x>0$ のとき、 $t>0$ で

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}\,dx = \int t^2 \frac{t}{\sqrt{27+6t-t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \int \frac{-t}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{(6-2t)-6}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(27+6t-t^2)'}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt - 3\int \frac{1}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt$$

$$= \sqrt{27+6t-t^2} - 3\int \frac{1}{\sqrt{-(t-3)^2+36}}\,dt$$

$$= \sqrt{27+6t-t^2} - 3\sin^{-1}\frac{t-3}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3\sin^{-1}\frac{1-3x}{6x}$$ //

(ii) $x<0$ のときは、$t<0$ で

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}}\,dx$$

$$= -\int t^2 \frac{t}{\sqrt{27+6t-t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt = -\frac{1}{2}\int\frac{(6-2t)-6}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{(27+6t-t^2)'}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt + 3\int\frac{1}{\sqrt{27+6t-t^2}}\,dt$$

$$= -\sqrt{27+6t-t^2} + 3\int\frac{1}{\sqrt{-(t-3)^2+36}}\,dt$$

$$= -\frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} + 3\sin^{-1}\frac{1-3x}{6x}$$ //

付録A（P32, $\int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n dx$ の漸化式の証明）

$I(m,n) = \int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n dx$ の漸化式

$$(23)\quad I(m,n) = \frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2)$$

（但し, $m+n \neq 0$）

(☺) $I(m,n) = \int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n dx$

$$= \int \left(\frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}\right)'(\cos x)^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}$$

$$- \int \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1} \cdot (n-1)(\cos x)^{n-2} \cdot (-\sin x) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int (\sin x)^{m+2} \cdot (\cos x)^{n-2} dx$$

$$= \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \int (\sin x)^m (1-\cos^2 x)(\cos x)^{n-2} dx$$

$$= \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1} + \frac{n-1}{m+1}\left(I(m,n-2) - I(m,n)\right)$$

$$\therefore \quad I(m,n)\left(1+\frac{n-1}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}$$

$$+\frac{n-1}{m+1} I(m, n-2)$$

$$\therefore \quad I(m,n) = \frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I(m, n-2) \quad \square$$

$$(24) \quad I(m,n) = -\frac{(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I(m-2, n)$$

(但し, $m+n \neq 0$)

$$I(m,n) = \int (\sin x)^m (\cos x)^n dx$$

$$= -\int (\sin x)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{n+1}(\cos x)^{n+1}\right)' dx$$

$$= -\left\{ \frac{1}{n+1}(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1} \right.$$

$$\left. - \int (m-1)(\sin x)^{m-2} \cdot (\cos x) \cdot \frac{1}{n+1}(\cos x)^{n+1} dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{n+1}(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}$$

$$+ \frac{m-1}{n+1}\int (\sin x)^{m-2}(1-\sin^2 x)(\cos x)^n dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}$$

$$+ \frac{m-1}{n+1}\left(I(m-2,n) - I(m,n)\right)$$

$$\therefore\ I(m,n)\left(1+\frac{m-1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1}(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}$$
$$+\frac{m-1}{n+1} I(m-2,n)$$

$$\therefore\ I(m,n) = -\frac{(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I(m-2,n) \text{。} \square$$

(25) $$I(m,n) = -\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I(m,n+2)$$
(但し, $n \neq -1$)

(∵) $$I(m,n+2) = \int (\sin x)^m (\cos x)^{n+2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}\right)'(\cos x)^{n+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}$$
$$-\int \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}\cdot(n+1)\cdot(\cos x)^{n}\cdot(-\sin x)\,dx$$

$$= \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}$$
$$+\frac{n+1}{m+1}\int (\sin x)^{m+2}(\cos x)^{n}\,dx$$

$$= \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}$$
$$+\frac{n+1}{m+1}\left(I(m,n) - I(m,n+2)\right)$$

$$\therefore\ I(m,n+2)\left(1+\frac{n+1}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}$$
$$+\frac{n+1}{m+1} I(m,n)$$

$$\therefore \frac{n+1}{m+1} I(m,n) = -\frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I(m,n+2)$$

$$\therefore I(m,n) = -\frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I(m,n+2) \quad \square$$

(26) $$I(m,n) = \frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I(m+2,n)$$

(但し, $m \neq -1$)

(証) $$I(m+2,n) = \int (\sin x)^{m+2}(\cos x)^n dx$$

$$= -\int (\sin x)^{m+1}\left(\frac{1}{n+1}(\cos x)^{n+1}\right)' dx$$

$$= -\left\{ \frac{1}{n+1}(\cos x)^{n+1}\cdot(\sin x)^{m+1} \right.$$

$$\left. - \int \frac{1}{n+1}(\cos x)^{n+1}\cdot(m+1)(\sin x)^m \cdot \cos x \, dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{n+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}$$

$$+ \frac{m+1}{n+1}\int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^{n+2} dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1} + \frac{m+1}{n+1}\left(I(m,n) - I(m+2,n)\right)$$

$$\therefore I(m+2,n)\left(1+\frac{m+1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1} + \frac{m+1}{n+1} I(m,n)$$

$$\therefore I(m,n) = \frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I(m+2,n) \quad \square$$

○ $I(-1,1) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log|\sin x|$ //

○ $I(-1,0) = \int \frac{1}{\sin x} dx$

$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$ //

○ $I(-1,-1) = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx$

$$= \int \tan x + \frac{1}{\tan x} dx$$

$$= -\log|\cos x| + \log|\sin x|$$

$$= \log|\tan x|$$ //

○ $I(0,1) = \int \cos x \, dx = \sin x$ //

○ $I(0,0) = \int 1 \, dx = x$

○ $I(0,-1) = \int \frac{1}{\cos x} dx$

$\tan\frac{x}{2} = t$ とおくと

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= -2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

$$= -\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+1}\right| //$$

$\circ\ I(1,1) = \int \sin x \cos x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x \ //$$

$\circ\ I(1,0) = \int \sin x\,dx = -\cos x \ //$

$\circ\ I(1,-1) = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| \ //$

となり $I(m,n) = \int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n\,dx$ が帰着させられた。

付録B。不定積分が初等関数で書くことが出来ない関数

有理関数，指数関数，三角関数から

i) 加減乗除

ii) 逆関数を取る

iii) 合成する。（つまり $y=f(x)$, $x=g(t)$ とすると

f と g の合成関数は $f(g(t))$ ）

以上3つの操作を有限回繰り返して得られる関数を初等関数という。

従って，無理関数，対数関数，逆三角関数も初等関数の1つである。

(0) $\sqrt{P(x)}$ （$P(x)$；3次以上の多項式）を含んだ無理関数の積分は，"一般には"初等関数にならない。しかし，"偶然"初等関数で書けることもある。これを擬楕円積分という

(ex) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x$$ //

(○) $\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{1}{\log x}dx$, $\int e^{-x^2}dx$, …

これらは，初等関数では表せないことが知られている。

このことの証明は，いきなり必要な知識が増えてしまうので，事実の紹介に留める。（解析的な微積分の話から離れ，代数的な取り扱いが必要となる。（微分代数の Liouville の定理で調べると出てくるが，高校の知識では読むのに労力がいる。））

（とても大ざっぱに言えば，初等関数で不定積分が表される必要十分条件が Liouville の定理である。従って，e^{-x^2} などは初等関数で不定積分が表される十分条件を満たさないことを示せば良い。）

(○) 一般に，$R(X, Y)$ を X と Y の有理関数，$P(x)$ を4次以下の多項式とする。このとき，$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$ は有理関数の積分と，次の三種類の楕円積分の標準形に帰着できる。

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx \\ \displaystyle\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \\ \displaystyle\int \frac{1}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx \end{cases}$$

※これらの積分は初等関数では書くことが出来ない。

但し，$0 \leq k \leq 1$，n は実数の定数である

付録 C (P32, ($I(m,n) = \int (\sin x)^m \cdot (\cos x)^n dx$ の漸化式) の続き)

$$I(m,0) =: I_m = \int \sin^m x \, dx$$

$$I(0,n) =: J_n = \int \cos^n x \, dx$$

に限定した場合について.

$$I_m = \int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \cdot \sin x \, dx$$

$$= \int \sin^{m-1} x \cdot (-\cos x)' \, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x - \int (\sin^{m-1} x)' (-\cos x) \, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + \int (m-1) \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) \left(\int \sin^{m-2} x \, dx - \int \sin^m x \, dx \right)$$

$$= -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) (I_{m-2} - I_m)$$

$$\therefore \quad I_m + (m-1) I_m = -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) I_{m-2}$$

$$\therefore \quad m I_m = -\sin^{m-1} x \cdot \cos x + (m-1) I_{m-2}$$

$$\therefore \quad I_m = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cdot \cos x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

$m = 2k \quad (k = 1, 2, \cdots)$ のとき,

$$I_{2k} = -\frac{1}{2k} \sin^{2k-1} x \cdot \cos x + \frac{2k-1}{2k} I_{2(k-1)}$$

$$= -\frac{1}{2k} \cdot \sin^{2k-1} x \cdot \cos x$$

$$+ \frac{2k-1}{2k} \left\{ -\frac{1}{2(k-1)} \sin^{2(k-1)-1} x \cdot \cos x + \frac{2(k-1)-1}{2(k-1)} \cdot I_{2(k-2)} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2k} \sin^{2k-1} x \cdot \cos x$$

$$- \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{1}{2k-2} \sin^{2(k-1)-1} x \cdot \cos x$$

$$+ \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \left\{ -\frac{1}{2(k-2)} \sin^{2(k-2)-1} x \cos x + \frac{2(k-2)-1}{2(k-2)} I_{2(k-3)} \right\}$$

$$= -\cos x \left(\frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{(2(k-1))!!}{(2k-1)!!} \cdot \sin^{2k-1} x \right.$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{(2(k-2))!!}{(2(k-1)-1)!!} \sin^{2(k-1)-1} x$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{(2(k-3))!!}{(2(k-2)-1)!!} \sin^{2(k-2)-1} x$$

$$\vdots$$

$$\left. + \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \frac{(2(k-k))!!}{(2(k-(k-1))-1)!!} \sin^{2(k-(k-1))-1} x \right)$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{2k!!} I_{2(k-k)}$$

ここで, $I_0 = \int \sin^0 x \, dx = \int dx = x$ より

$$I_{2k} = -\cos x \cdot \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{(2(i-1))!!}{(2i-1)!!} \sin^{2i-1} x$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{2k!!} x$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \left\{ -\sum_{i=1}^{k} \frac{(2(i-1))!!}{(2i-1)!!} \sin^{2i-1} x \cdot \cos x + x \right\} //$$

$m = 2k-1 \quad (k = 2, 3, \cdots)$ のとき,

$$I_{2k-1} = -\frac{1}{2k-1} \sin^{2k-2} x \cdot \cos x + \frac{2k-2}{2k-1} I_{2(k-1)-1}$$

$$= -\frac{1}{2k-1} \sin^{2k-2} x \cos x$$

$$+ \frac{2k-2}{2k-1} \left\{ -\frac{1}{2(k-1)-1} \sin^{2(k-1)-2} x \cdot \cos x + \frac{2(k-1)-2}{2(k-1)-1} I_{2(k-2)-1} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2k-1} \sin^{2k-2} x \cdot \cos x$$

$$- \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{1}{2k-3} \sin^{2(k-1)-2} x \cdot \cos x$$

$$+ \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \left\{ -\frac{1}{2(k-2)-1} \sin^{2(k-2)-2} x \cdot \cos x + \frac{2(k-2)-2}{2(k-2)-1} I_{2(k-3)-1} \right\}$$

$$= -\cos x \left(\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-1)-1)!!}{(2k-2)!!} \cdot \sin^{2k-2} x \right.$$

$$+ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-2)-1)!!}{(2(k-1)-2)!!} \cdot \sin^{2(k-1)-2} x$$

$$+ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-3)-1)!!}{(2(k-2)-2)!!} \sin^{2(k-2)-2} x$$

$$\vdots$$

$$\left. + \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-(k-1))-1)!!}{(2(k-(k-2))-2)!!} \sin^{2(k-(k-2))-2} x \right)$$

$$+ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot I_1$$

ここで, $I_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x$ より,

$$I_{2k-1} = -\cos x \cdot \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \sin^{2i} x$$

$$- \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cos x$$

$$= \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left\{ -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \sin^{2i} x \cdot \cos x - \cos x \right\} \cdots (*)$$

なお, $\sum_{i=1}^{k} a_i = 0$. $(k<1)$ とすれば, $(*)$に $k=1$ を代入しても,

$I_{2\cdot1-1} = \frac{0!!}{1!!}\left\{-\cos x\right\} = -\cos x$ となるので, 成り立つ. よって,

$(*)$は I_{2k-1} の一般解である. ゆえに, 以上をまとめると,

$$\begin{cases} I_0 = x, \\ I_{2k-1} = \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\left\{ -\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \sin^{2i} x \cdot \cos x - \cos x \right\} \quad (k=1,2,\cdots) \\ I_{2k} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left\{ -\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dfrac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!} \sin^{2i-1} x \cdot \cos x + x \right\} \quad (k=1,2,\cdots) \end{cases}$$

となる。

$$J_n = \int \cos^n x \, dx$$

に限定した場合について,

$$\begin{aligned} J_n = \int \cos^n x \, dx &= \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx \\ &= \int \cos^{n-1} x \cdot (\sin x)' \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x - \int (\cos^{n-1} x)' \sin x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int (n-1) \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \cdot \sin x \cdot dx \\ &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \, (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x \, dx - \int \cos^n x \, dx \right) \\ &= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)(J_{n-2} - J_n) \end{aligned}$$

$$\therefore J_n + (n-1) J_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) J_{n-2}$$

$$\therefore n J_n = \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) J_{n-2}$$

$$\therefore J_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

$n = 2k$ （$k = 1, 2, \cdots$ のとき）

$$J_{2k} = \frac{1}{2k}\cos^{2k-1}x \cdot \sin x + \frac{2k-1}{2k} J_{2(k-1)}$$

$$= \frac{1}{2k}\cos^{2k-1}x \cdot \sin x$$

$$+ \frac{2k-1}{2k}\left\{ \frac{1}{2(k-1)}\cos^{2(k-1)-1}x \cdot \sin x + \frac{2(k-1)-1}{2(k-1)} J_{2(k-2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2k}\cos^{2k-1}x \cdot \sin x$$

$$+ \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{1}{2k-2} \cdot \cos^{2(k-1)-1}x \cdot \sin x$$

$$+ \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2}\left\{ \frac{1}{2(k-2)}\cos^{2(k-2)-1}x \cdot \sin x + \frac{2(k-2)-1}{2(k-2)} J_{2(k-3)} \right\}$$

$$= \sin x \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2(k-1))!!}{(2k-1)!!} \cdot \cos^{2k-1}x \right.$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2(k-2))!!}{(2(k-1)-1)!!} \cdot \cos^{2(k-1)-1}x$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2(k-3))!!}{(2(k-2)-1)!!} \cos^{2(k-2)-1}x$$

$$\vdots$$

$$\left. + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2(k-k))!!}{(2(k-(k-1)-1)!!} \cos^{2(k-(k-1))-1}x \right)$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} J_0$$

$J_0 = \int \cos^0 x\, dx = \int dx = x$ より，

$$J_{2k} = \sin x \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \sum_{i=1}^{k} \frac{(2(i-1))!!}{(2i-1)!!} \cos^{2i-1} x$$

$$+ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{(2(i-1))!!}{(2i-1)!!} \cos^{2i-1} x \cdot \sin x + x \right\}_{//}$$

$n = 2k-1$ $(k=2, 3, \cdots)$ のとき,

$$J_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \cos^{2k-2} x \cdot \sin x + \frac{2k-2}{2k-1} J_{2(k-1)-1}$$

$$= \frac{1}{2k-1} \cos^{2k-2} x \cdot \sin x$$

$$+ \frac{2k-2}{2k-1} \left\{ \frac{1}{2(k-1)-1} \cos^{2(k-1)-2} x \cdot \sin x + \frac{2(k-1)-2}{2(k-1)-1} J_{2(k-2)-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{2k-1} \cos^{2k-2} x \cdot \sin x$$

$$+ \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{1}{2k-3} \cos^{2(k-1)-2} x \cdot \sin x$$

$$+ \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \cdot \left\{ \frac{1}{2(k-2)-1} \cos^{2(k-2)-2} x \cdot \sin x + \frac{2(k-2)-2}{2(k-2)-1} J_{2(k-3)-1} \right\}$$

$$= \sin x \left(\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-1)-1)!!}{(2k-2)!!} \cos^{2k-2} x \right.$$

$$+ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-2)-1)!!}{(2(k-1)-2)!!} \cos^{2(k-1)-2} x$$

$$+ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-3)-1)!!}{(2(k-2)-2)!!} \cos^{2(k-2)-2} x$$

$$\vdots$$

$$\left. + \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2(k-(k-1)-1)!!}{(2(k-(k-2)-2)!!} \cos^{2(k-(k-2)-2} x \right) + \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} J_1$$

ここで，$J_1 = \int \cos x \, dx = \sin x$ より

$$J_{2k-1} = \sin x \cdot \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cos^{2i} x$$

$$+ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \sin x$$

$$= \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left\{ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cos^{2i} x \cdot \sin x + \sin x \right\} \cdots (**)$$

なお，P.60と同様に，$\sum_{i=1}^{k} a_i = 0 \ (k < 1)$ とすれば，(**)に$k=1$を代入しても

$$J_{2\cdot 1-1} = \frac{0!!}{1!!} \left\{ \sin x \right\} = \sin x$$ となり成り立つ よって

(**)は J_{2k-1} の一般解である。以上をまとめると，

$$\begin{cases} J_0 = x \\ J_{2k-1} = \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cos^{2i} x \cdot \sin x + \sin x \right\} & (k = 1, 2, \cdots) \\ J_{2k} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!} \cos^{2i-1} x \cdot \sin x + x \right\} & (k = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

となる。