マスター・オブ・漸化式

[1] 隣接2項間の漸化式

※ 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 は与えられているものとする。

(1) $a_{n+1} = a_n + d$ (等差数列)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1, 公差 d の等差数列であるので,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

(2) $a_{n+1} = r a_n$ (等比数列)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1, 公比 r の等比数列であるので,

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + f(n)$ (階差数列が分かる形)

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を考えると,

$b_n = a_{n+1} - a_n = f(n)$.

よって,
$$\begin{cases} \text{(i)}\ n=1 \text{ のとき, } a_n = a_1 & \cdots ① \\ \text{(ii)}\ n \geqq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k & \cdots ② \end{cases}$$
に帰着。

従って,
$$\begin{cases} \text{(i)}\ n=1 \text{ のとき, } a_n = a_1 & \cdots ① \\ \text{(ii)}\ n \geqq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) & \cdots ② \end{cases}$$
を求める。なお, 一般項を求めたとき, ②に $n=1$ を代入して①と一致するか調べること!

(4) $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$

(i) $n=1$ のとき, $a_n = a_1$,

(ii) $n \geqq 2$ のとき,

$$a_2 = f(1) \cdot a_1$$

$$a_3 = f(2) \cdot a_2 = f(2) \cdot f(1) \cdot a_1$$

$$a_4 = f(3) \cdot a_3 = f(3) \cdot f(2) \cdot f(1) \cdot a_1$$

$$\vdots$$

$$a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \cdots \cdot f(1) \cdot a_1 \text{ //}$$

(ex) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$

(i) $n=1$ のとき, $a_n = a_1 = 2$ …①

(ii) $n \geqq 2$ のとき,

$$a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1$$

$$= \frac{1}{n} \cdot 2 = \frac{2}{n} \quad \cdots ②$$

②に, $n=1$ を代入すると, $a_1 = 2$ より①と一致する.

よって, (i), (ii) から 一般項 $a_n = \dfrac{2}{n}$ $(n \geqq 1)$ //

(4)' $a_{n+1} = \dfrac{f(n)}{f(n+1)} \cdot a_n$

$$a_{n+1} = \frac{f(n)}{f(n+1)} a_n \iff f(n+1) \cdot a_{n+1} = f(n) a_n$$

より $b_n = f(n) a_n$ とおくと、$b_n = b_1 \quad (n \geqq 1)$

となる。

(ex)（別解）

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$ より

$$(n+1) a_{n+1} = n a_n.$$

従って、$b_n = n a_n$ とおくと、$b_n = b_1$. ここで、

$b_1 = 1 \cdot a_1 = 2$ より

$b_n = 2 \qquad \therefore \ n a_n = 2$

$$\therefore \ a_n = \frac{2}{n} \quad (n \geqq 1)$$

(5) $a_{n+1} = pa_n + q$ (p, q; 定数, $p \neq 0, 1$, $q \neq 0$)

(注) $p=1$, $q \neq 0$ のとき (5)は (1) 等差数列

$p \neq 1, 0$, $q = 0$ のとき, (5)は(2) 等比数列 となる。

特性方程式 $c = pc + q$ を解くと,

$$c = \frac{q}{1-p} \quad (1-p \neq 0)$$

このcを用いると,

$$a_{n+1} = pa_n + q \iff a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$ となる。

(∵)
$$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$

$$a_{n+1} - \frac{q}{1-p} = p\left(a_n - \frac{q}{1-p}\right)$$

$$\therefore\ a_{n+1} = pa_n - (p-1)\cdot\frac{q}{1-p}$$

$$\therefore\ a_{n+1} = pa_n + q \quad \square$$

そこで, $b_n = a_n - c$ とおくと,

$$a_{n+1} - c = p(a_n - c) \iff \begin{cases} b_{n+1} = pb_n \\ b_1 = a_1 - c \end{cases}$$

$\{b_n\}$は 初項 $b_1 = a_1 - c$, 公比 p の等比数列なので,

$b_n = (a_1 - c)p^{n-1}$ $\quad\therefore\ a_n - c = (a_1 - c)p^{n-1}$

$\therefore\ a_n = (a_1 - c)p^{n-1} + c$

(5)（別解）　階差数列を利用

漸化式から

$$\begin{cases} a_{n+2} = pa_{n+1} + q & \cdots ① \\ a_{n+1} = pa_n + q & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n)$$ を得る

数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ で定義すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = p(a_{n+1} - a_n)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b_{n+1} = pb_n \\ b_1 = a_2 - a_1 \end{cases}$$

ここで、$a_2 = pa_1 + q$ であるから

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b_{n+1} = pb_n \\ b_1 = (p-1)a_1 + q \end{cases}$$

よって 数列 $\{b_n\}$ は初項 $(p-1)a_1 + q$、公比 p の等比数列であるから

$$b_n = \{(p-1)a_1 + q\}p^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

よって

$$\begin{cases} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k & (n \geqq 2) \\ a_n = a_1 & (n = 1) \end{cases}$$ より

$$\begin{cases} a_n = a_1 + \{(p-1)a_1 + q\}\sum_{k=1}^{n-1} p^{k-1} & (n \geqq 2) \\ a_n = a_1 & (n = 1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_n = \left(a_1 + \dfrac{q}{p-1}\right) p^{n-1} - \dfrac{q}{p-1} & \cdots ③ \quad (n \geqq 2) \\ a_n = a_1 & \cdots ④ \quad (n=1) \end{cases}$$

$n=1$ を ③ に代入すると ④ になるので

一般項 $a_n = \left(a_1 - \dfrac{q}{1-p}\right) p^{n-1} + \dfrac{q}{1-p}$ // $(n \geqq 1)$

(注)

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n \geqq 1)$$

$= (pa_n + q) - a_n = (p-1)a_n + q$ より

$$(p-1)a_n + q = \{(p-1)a_1 + q\} p^{n-1} \quad (n \geqq 1)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{p-1}\left(\{(p-1)a_1 + q\} p^{n-1} - q\right)$$

$$\therefore a_n = \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right) p^{n-1} + \frac{q}{1-p} \quad (n \geqq 1)$$

としても良い。

(6) $a_{n+1} = pa_n + qr^n \quad (p \neq 0, 1,\ q \neq 0,\ r \neq 0, 1)$

与式の両辺を r^{n+1} で割ると

$\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \dfrac{p}{r} \cdot \dfrac{a_n}{r^n} + \dfrac{q}{r}$ を得る

$b_n = \dfrac{a_n}{r^n}$ とおくと、 $b_{n+1} = \dfrac{p}{r} \cdot b_n + \dfrac{q}{r}$ となるので

(5) の形に帰着する。

(6)（別解）（階差数列の形に帰着）

与式の両辺を p^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q}{p}\cdot\left(\frac{r}{p}\right)^n$$

$$c_n = \frac{a_n}{p^n}$$ とおくと、

$$c_{n+1} = c_n + \frac{q}{p}\cdot\left(\frac{r}{p}\right)^n, \quad c_1 = \frac{a_1}{p}$$ となり

c_n の階差数列を $d_n = c_{n+1} - c_n$ とおくと

$$\begin{cases} c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k & (n \geqq 2) \\ c_n = c_1 & (n=1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c_n = c_1 + \frac{q}{p}\cdot\frac{r}{p} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{r}{p}\right)^{k-1} \\ c_n = c_1 \end{cases}$$

$$\therefore c_n = c_1 + \frac{qr}{p^2}\cdot\frac{\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} - 1}{\frac{r}{p} - 1}$$

$$\therefore c_n = c_1 + \frac{qr}{p}\cdot\frac{\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} - 1}{r-p} \quad (n \geqq 2)$$

この式は $n=1$ のとき c_1 となるので

$$c_n = c_1 + \frac{qr}{p}\cdot\frac{\left(\frac{r}{p}\right)^{n-1} - 1}{r-p} \quad (n \geqq 1)$$ //

(6)（別解2）　$(p \neq r)$ の場合

数列 $\{a_n - kr^n\}$ を等比数列にする

$b_n = a_n - kr^n$ とおくと.

$a_n = b_n + kr^n$ であり、代入して

$$b_{n+1} + kr^{n+1} = p(b_n + kr^n) + qr^n$$

$$\therefore b_{n+1} + kr^{n+1} = pb_n + (pk+q)r^n$$

b_n が等比数列になるように、定数 k の値を定める.

すなわち、$kr^{n+1} = (pk+q)r^n$ が

任意の自然数 n で成り立つ。よって

$$kr = pk + q \quad \therefore k = \frac{q}{r-p} \quad (p \neq r)$$

このとき $b_1 = a_1 - \left(\frac{q}{r-p}\right) \cdot r$

$b_{n+1} = pb_n$ より

$$b_n = \left(a_1 - \frac{qr}{r-p}\right)p^{n-1}$$

$$\therefore a_n - \left(\frac{q}{r-p}\right)r^n = \left(a_1 - \frac{qr}{r-p}\right)p^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{q}{r-p}r^n + \left(a_1 - \frac{qr}{r-p}\right)p^{n-1}$$

[2] 隣接3項間の漸化式

以降、数列 $\{a_n\}$ において、a_1, a_2 は与えられているものとする。

(8) $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ $(p \neq 0,\ q \neq 0)$

特性方程式 $t^2 + pt + q = 0$ を作り、この2次方程式の解を α, β とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$ を得る。

よって、$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

$$\therefore\ a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

$$\therefore\ a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

と変形される。

数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ で定義すると

$$b_{n+1} = \beta b_n, \quad b_1 = a_2 - \alpha a_1$$

より、$\{b_n\}$ は初項 $a_2 - \alpha a_1$、公比 β の等比数列となる。よって $b_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$ $(n \geq 1)$

$$\therefore\ a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$$

$$\therefore\ a_{n+1} = \alpha a_n + (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$$

よって (6) に帰着される。

なお $\alpha \neq \beta$ の場合、α と β を逆にして得られる

$$a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$ を用いて

$$\begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} & \cdots ① \\ a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1} & \cdots ② \end{cases}$$

から a_{n+1} を消去して

$$(\beta - \alpha) a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$

$$= a_2(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) - a_1(\alpha\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta)$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{\beta - \alpha}\left\{ a_2(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) - a_1\alpha\beta(\beta^{n-2} - \alpha^{n-2}) \right\}$$

と解くこともできる。

(7) $a_{n+1} = pa_n + f(n) \quad (p \neq 0, 1)$,

$f(n)$ は n の m 次多項式 $(m \geqq 1)$

(注) $p = 1$ のときは、(3) と同じ

$b_n = a_n - g(n)$ （$g(n)$ は n の m 次多項式）

とおくと $a_n = b_n + g(n)$ となり、代入すると

$$b_{n+1} + g(n+1) = p\{b_n + g(n)\} + f(n)$$

$$= pb_n + p \cdot g(n) + f(n)$$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように多項式 $g(n)$ を定める。すなわち

$$g(n+1) = pg(n) + f(n)$$

が任意の自然数 n について成り立てば良い。

（そのような $g(n)$ が具体的に求まったとして、議論を続ける。）

このとき $b_1 = a_1 - g(1)$, $b_{n+1} = pb_n$

よって $b_n = (a_1 - g(1)) \cdot p^{n-1}$

$$\therefore \quad a_n = g(n) + (a_1 - g(1)) \cdot p^{n-1}$$

(注) $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ を $a_{n+1} - g(n+1) = p(a_n - g(n))$ と変形しているだけである。

(ex) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2a_n \underbrace{- n^2 + n}_{}$ を解け

nに関する2次の多項式

数列 b_n を $b_n = a_n - (an^2 + bn + c)$ で定義する.

(nに関する2次の多項式

このとき $a_n = b_n + (an^2 + bn + c)$ より代入して

$b_{n+1} + (a(n+1)^2 + b(n+1) + c)$

$= 2\{b_n + (an^2 + bn + c)\} - n^2 + n$

$\therefore\ a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2(an^2 + bn + c) - n^2 + n$

$\therefore\ a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c$

$= (2a-1)n^2 + (2b+1)n + 2c$

$\therefore\ an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$

$= (2a-1)n^2 + (2b+1)n + 2c$

が nに関する恒等式となれば良い。このとき

係数を比較して

$$\begin{cases} a = 2a-1 \\ 2a+b = 2b+1 \\ a+b+c = 2c \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

よって、
$$\begin{cases} b_1 = a_1 - (n^2+n+2) \\ b_{n+1} = 2b_n \end{cases}$$

より
$$b_n = (-n^2-n+2)\,2^{n-1}$$

$$\therefore\ \underline{a_n = (-n^2-n+2)\,2^{n-1} + n^2+n+2}$$

(注) m次多項式に加えて

$c_0 n^m + \cdots + c_m + c_{m+1} r^m$ が含まれている場合でも

$$g(n) = d_0 n^m + \cdots + d_m + d_{m-1} r^n$$

とおいて

$$g(n+1) = p\,g(n) + f(n)$$

を満たすように係数 $d_0, \cdots, d_m, d_{m+1}$ が

求められればこの解法が使えるが

一般に、いつでも解けるとは限らない。

[3] 分数型の漸化式

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 は与えられているものとする

(9) $$a_{n+1} = \frac{pa_n}{ra_n + s} \quad (p \neq 0,\ r \neq 0,\ s \neq 0,\ a_1 \neq 0)$$

(注) $a_1 = 0$ のとき, 全ての自然数 n に対して $a_n = 0$ である.

(証明は, 数学的帰納法による.)

定義から, $ra_1 + s \neq 0$ (すなわち, $a_1 \neq -\frac{s}{r}$) である。そこで,

任意の自然数 n について, $ra_n + s \neq 0$ であることを

示す. (☺) $n = k$ のとき, $ra_k + s \neq 0$ を仮定すると

$$a_{k+1} = \frac{pa_k}{ra_k + s}$$ である。ここで,

背理法を用いて証明しよう. $ra_{k+1} + s = 0$ とすると,

$$a_{k+1} = -\frac{s}{r}$$ が成り立つ. 従って

$$\therefore \frac{pa_k}{ra_k + s} = -\frac{s}{r}$$

$$\therefore pa_k = -s\left(a_k + \frac{s}{r}\right)$$

$$\therefore\ a_k = \frac{s}{p+s}\cdot\frac{-s}{r}$$

$$\therefore\ a_{k+1} = \frac{p+s}{s} a_k$$ が成り立つ。仮定より $a_p \neq -\frac{s}{r}$ なので

$$a_{p+1} \neq \frac{p+s}{s}\cdot -\frac{s}{r}$$

$$\therefore\ a_{p+1} \neq -\frac{p+s}{r}$$

$$\therefore\ ra_{p+1}+s \neq -p$$

ここで $-p \neq 0$ より $ra_{p+1}+s \neq 0$ より矛盾。従って

$ra_{p+1}+s \neq 0$。ゆえに $ra_1+s \neq 0$ ならば

任意の自然数 n について $ra_n+s \neq 0$ が示された。

このことより 漸化式 (9) は

$p \neq 0$, $ra_1+s \neq 0$ を仮定すれば正しく定義できる。

(特定の条件を用いて定義されるとき、その定義が
自己矛盾を持たないことを "well-defined" という。
数列$\{a_n\}$を漸化式で定義したのに、どこかのNから先
a_nが定義できていなかったら、有限数列(末項a_Nが
存在する)の漸化式になってしまうが、そのようなNは
考えなくて良い、という主張 (claim) である。高校で
扱う漸化式は無限数列。めでたし。)

両辺の逆数を取ると、

$$a_{n+1} = \frac{pa_n}{ra_n + s} \iff \frac{ra_n + s}{pa_n} = \frac{1}{a_{n+1}}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{r}{p} + s \cdot \frac{1}{a_n}$$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと、 $b_{n+1} = s b_n + \dfrac{r}{p}$

後は(5)と同じ形である。

(10) $a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ $(r \neq 0,\ ps - qr \neq 0,\ ra_1 + s \neq 0)$

特性方程式 $t = \dfrac{pt + q}{rt + s}$ を考える。

$rt^2 + (s-p)t - q = 0$ の解を α, β とすると

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \alpha)}{(r\alpha + s)(ra_n + s)} \quad \text{①}$$

$$a_{n+1} - \beta = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} - \frac{p\beta + q}{r\beta + s} = \frac{(ps - qr)(a_n - \beta)}{(r\beta + s)(ra_n + s)} \quad \text{②}$$

($\because$ $\alpha = \dfrac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$ を、漸化式の両辺から引く。)

$b_n = a_n - \alpha$ とおく。①に代入して

$$b_{n+1} = \frac{(ps-qr)\,b_n}{(r\alpha+s)(r\,b_n + r\alpha + s)}$$

両辺の逆数を取り，

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{r\alpha+s}{ps-qr}\left(r + (r\alpha+s)\cdot\frac{1}{b_n}\right)$$

$c_n = \dfrac{1}{b_n}$ とおくと

$$c_{n+1} = \frac{(r\alpha+s)^2}{ps-qr}\,c_n + \frac{r(r\alpha+s)}{ps-qr}$$

となり，(5)の形に帰着される。

(注) $b_n = a_n - \beta$ とおき，②に代入しても，同様の結論を得る。

なお，$\alpha \neq \beta$ の場合，任意の自然数 n に対して

$a_n \neq \beta$ となることを数学的帰納法で証明したうえで，

① ÷ ② を作ると

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta} = \frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$$ となる。

これは数列 $\left\{ \dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} \right\}$ が初項 $\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}$，公比 $\dfrac{r\beta+s}{r\alpha+s}$

の等差数列になっているので

$$\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} = \left(\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\right)\cdot\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}$$

を得る．これにより a_n を求めると

$$\left(1-\left(\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\right)\cdot\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}\right)a_n$$

$$= \alpha - \left(\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\right)\cdot\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}\cdot\beta$$

$$\therefore\ a_n = \frac{\alpha-\left(\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\right)\cdot\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}\cdot\beta}{1-\left(\frac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\right)\cdot\left(\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\right)^{n-1}} \quad (n\geqq 1) \quad //$$

となり，先程と比べて比較的容易に求めることができる．

[4] 連立型の漸化式

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の初項 a_1, b_1 は与えられているものとする。

(11) $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots ② \end{cases}$ $(q \neq 0,\ r \neq 0)$

(注) $q = 0$ のとき a_n は等比数列,

$r = 0$ のとき b_n は等比数列になる.

(3項間漸化式に帰着する)

①より $a_{n+2} = pa_{n+1} + qb_{n+1}$ $\cdots ③$

$$\therefore\ b_{n+1} = \frac{1}{q}a_{n+2} - \frac{p}{q}a_{n+1}$$

また ① $\Leftrightarrow$ $b_n = \dfrac{1}{q}a_{n+1} - \dfrac{p}{q}a_n$ より

②に代入して, b_{n+1}, b_n を消去すると

$$\frac{1}{q}a_{n+2} - \frac{p}{q}a_{n+1} = ra_n + s\left(\frac{1}{q}a_{n+1} - \frac{p}{q}a_n\right)$$

$$\therefore\ a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps - qr)a_n = 0$$

また, $a_2 = pa_1 + qb_1$ より

a_1, $a_2 = pa_1 + qb_1$ を初項と第2項に持つ

3項間漸化式に帰着できる。

（別解）数列 $\{a_n + k b_n\}$ を等比数列にする。

$a_{n+1} + k b_{n+1} = (p a_n + q b_n) + k(r a_n + s b_n)$ （k：定数）

（☺ 漸化式をそのまま用いた。）

$$= (p+kr)a_n + (q+ks)b_n$$

$$= (p+kr)\left(a_n + \frac{q+ks}{p+kr} b_n\right)$$

よって $k = \dfrac{q+ks}{p+kr}$ ならば、数列 $\{a_n + k b_n\}$ は

等比数列になる。上式を満たす k は

$\therefore k(p+kr) = q+ks$ を解けば良い。

$\therefore rk^2 + (p-s)k - q = 0$ この k に関する2次方程式の

解を α, β とおくと、$\alpha = \dfrac{q+\alpha s}{p+\alpha r}$，$\beta = \dfrac{q+\beta s}{p+\beta r}$ より

$$\begin{cases} a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = (p+\alpha r)(a_n + \alpha b_n) & \cdots ① \\ a_{n+1} + \beta b_{n+1} = (p+\beta r)(a_n + \beta b_n) & \cdots ② \end{cases}$$

となる。
$\left\{\begin{array}{l} \text{数列 } \{a_n + \alpha b_n\} \text{ は初項 } a_1 + \alpha b_1,\ \text{公比 } p+\alpha r, \\ \text{数列 } \{a_n + \beta b_n\} \text{ は初項 } a_1 + \beta b_1,\ \text{公比 } p+\beta r \end{array}\right\}$ なので、

$$\begin{cases} a_n + \alpha b_n = (a_1 + \alpha b_1)(p + \alpha r)^{n-1} \\ a_n + \beta b_n = (a_1 + \beta b_1)(p + \beta r)^{n-1} \end{cases}$$ を得る.

(i) $\alpha \neq \beta$ の場合, a_n, b_n を連立して

$$(\alpha - \beta) b_n = (a_1 + \alpha b_1)(p + \alpha r)^{n-1} - (a_1 + \beta b_1)(p + \beta r)^{n-1}$$

$$\therefore\ b_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left\{(a_1 + \alpha b_1)(p + \alpha r)^{n-1} - (a_1 + \beta b_1)(p + \beta r)^{n-1}\right\}$$ //

$$\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) a_n = \left(\frac{1}{\alpha} a_1 + b_1\right)(p + \alpha r)^{n-1} - \left(\frac{1}{\beta} a_1 + b_1\right)(p + \beta r)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}\left\{\left(\frac{1}{\alpha} a_1 + b_1\right)(p + \alpha r)^{n-1} - \left(\frac{1}{\beta} a_1 + b_1\right)(p + \beta r)^{n-1}\right\}$$ //

((注) $q \neq 0$ より $rk^2 + (p - s)k - q = 0$ の 2解 α, β は $\alpha\beta = \dfrac{q}{r} \neq 0$ より $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ である。)

(ii) $\alpha=\beta$ の場合

$$a_n+\alpha b_n=(a_1+\alpha b_1)(p+\alpha r)^{n-1} \quad \cdots ④$$

より a_n を b_n (or, b_n を a_n) で表せる。これを

① or ② に代入して 2項間漸化式に帰着。

④より、$a_n=-\alpha b_n+(a_1+\alpha b_1)(p+\alpha r)^{n-1}$ を②に代入して

$$\therefore\ b_{n+1}=r\left(-\alpha b_n+(a_1+\alpha b_1)(p+\alpha r)^{n-1}\right)+s b_n$$

$$\therefore\ b_{n+1}=(s-r\alpha)b_n+r(a_1+\alpha b_1)(p+\alpha r)^{n-1}$$

これは (6) の形であるので、b_n が導かれる。

一方、④より、$b_n=-\frac{1}{\alpha}a_n+\left(\frac{1}{\alpha}a_1+b_1\right)(p+\alpha r)^{n-1}$

これを ① に代入して

$$a_{n+1}=pa_n+q\left\{-\frac{1}{\alpha}a_n+\left(\frac{1}{\alpha}a_1+b_1\right)(p+\alpha r)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\ a_{n+1}=\left(p-\frac{q}{\alpha}\right)a_n+q\left(\frac{1}{\alpha}a_1+b_1\right)(p+\alpha r)^{n-1}$$

これも (6) の形であるので、a_n が導かれる。

(注) $\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots ⑤ \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n & \cdots ⑥ \end{cases}$

を、「対称型」ということがある。これは

$$⑤+⑥ \iff a_{n+1} + b_{n+1} = (p+q)(a_n + b_n)$$

$$⑤-⑥ \iff a_{n+1} - b_{n+1} = (p-q)(a_n - b_n)$$

となり、数列 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ が等比数列になる。

よって $\begin{cases} a_n + b_n = (a_1 + b_1)(p+q)^{n-1} \\ a_n - b_n = (a_1 - b_1)(p-q)^{n-1} \end{cases}$

を得、$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left\{ (a_1+b_1)(p+q)^{n-1} + (a_1-b_1)(p-q)^{n-1} \right\} \\ b_n = \frac{1}{2}\left\{ (a_1+b_1)(p+q)^{n-1} - (a_1-b_1)(p-q)^{n-1} \right\} \end{cases}$

[5] (やや技巧的な) 特殊な漸化式

(12) $a_{n+1} = p(a_n)^k \quad (p>0,\ k\neq 1,\ a_1>0)$

(土曜補習の時点では, 対数 (logarithm) は未習事項であるが, 数II で2学期に学習する。ここではとても簡単に, その内容を押さえよう。)

(Def) $a>0,\ a\neq 1,\ M>0$, のとき

$a^p = M$ となる p を $\log_a M$ と書く。

すなわち $p = \log_a M$ であり $a^{\log_a M} = M$.

$a^p = M$ の両辺を k 乗して

$a^{kp} = M^k$ となるので, $kp = \log_a(M^k)$

一方, $p = \log_a M$ でもあったので, 両辺に k を掛けて $kp = k\log_a M$

$\therefore \log_a(M^k) = k\log_a M$, が成り立つ

(12) $a_{n+1} = p(a_n)^k$ は, $a_1>0$ であれば数学的帰納法から

$a_n>0$ (nは任意の自然数) が成り立つことが証明できる。(略, 各自確かめよ)

ここで、$\begin{cases} a^{p} = M \\ a^{p'} = M \end{cases} \iff p = p'$ より $a>0$ として、

$$M = N \iff \log_a M = \log_a N \quad (M=N>0)$$

が成り立つことを利用する。(12)の両辺の対数を取ると、

任意の $C>0$ に対して

$$\log_c a_{n+1} = \log_c (p(a_n)^k) \text{ が成り立つ}$$

なお

$a^m = M$, $a^n = N$とすると、2式の積を取り

$a^{m+n} = M \cdot N$ となる。

$\therefore \quad m+n = \log_a M \cdot N$

一方 $m = \log_a M$, $n = \log_a N$ だったので

$$\log_a M + \log_a N = \log_a M \cdot N \text{ が成り立つ}$$

$$\therefore \quad \log_c a_{n+1} = \log_c p + \log_c (a_n)^k$$

$$\therefore \quad \log_c a_{n+1} = \log_c p + k \log_c a_n$$

$b_n = \log_c a_n$ とおくと、$b_{n+1} = \log_c p + k b_n$,

$$\therefore \begin{cases} l_{n+1} = k\, l_n + \log_c p \\ l_1 = \log_c a_1 \end{cases}$$

となり これは (5) の形と同じであある。

○ $\{S_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を表す。すなわち $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

なお、
$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \end{cases}$$

より、両辺を引き算すると

$$\begin{cases} S_n - S_{n-1} = a_n & (n \geqq 2) \\ S_1 = a_1 & (n = 1) \end{cases}$$

は良く知られた式である。

(13) S_n と a_n を含む漸化式

〈解法 1〉 数列 S_n を、上式を用いて消去する。

(ex) $S_n = 2a_n + n$

(Ans)
$$\begin{cases} S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1) \\ S_n = 2a_n + n \end{cases} \quad (n \geqq 1)$$
より

$$S_{n+1} - S_n = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1 \qquad (n \geqq 1)$$

なお $n=1$ を代入すると、$S_1 = 2a_1 + 1 \Leftrightarrow S_1 = 2S_1 + 1 \Leftrightarrow S_1 = -1$

$\Leftrightarrow a_1 = -1$ が求まる。後は(5)と同様。

〈解法2〉 数列 $\{S_n\}$ を求めて、数列 $\{a_n\}$ を求める。

(ex) $S_n = 2a_n + n$

(解法1でも言えるが、先に初項を求めるのが良い。)

上述の計算により $a_1 = -1$.

$(n \geqq 2)$ のとき、$S_n = 2(S_n - S_{n-1}) + n$

$$\therefore\ S_n = 2S_{n-1} - n$$

(7)と同様、$\{S_n - (an+b)\}$ が等比数列となるように a, b を求める。すなわち、$n \geqq 2$ のとき、

$$S_n - (an+b) = 2\{S_{n-1} - (a(n-1)+b)\}$$

$$\therefore\ -n - an - b = -2a(n-1) - 2b$$

$$\therefore\ (a-1)n + (-2a+b) = 0 \quad \therefore\ a = 1,\ b = 2$$

(nに関する恒等式のため.)

$\therefore S_n - (n+2) = 2\{S_{n-1} - (n+1)\}$ $(n \geqq 2)$

$\therefore S_{n+1} - (n+3) = 2\{S_n - (n+2)\}$ // $(n \geqq 1)$

よって数列 $\{S_n - (n+2)\}$ は初項 $S_1 - (1+2) = -4$，

公比2の等比数列であるから

$S_n - (n+2) = -2^{n+1}$

$\therefore S_n = n+2-2^{n+1}$ $(n \geqq 1)$ //

$(n \geqq 2$ のとき$)$ $a_n = S_n - S_{n-1}$ より

$a_n = n+2-2^{n+1} - ((n-1)+2-2^n)$

$\therefore a_n = 1-2^n$ …①

$(n=1$ のとき$)$ ①に $n=1$ を代入すると $a_1=-1$ より，

条件を満たす。

$\therefore \underline{a_n = 1-2^n}$ $(n \geqq 1)$ //

(14) 数列 $\{a_n\}$ を含んだ数列 $\{b_n\}$ の漸化式

(ex) $a_1 = 1$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n + 1$

(point) $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおく。

両辺を $n(n+1)$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおくと

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)}$$

その階差数列を c_n とおくと、

$$c_n = b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\therefore \begin{cases} b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} c_k & (n \geqq 2) \\ b_n = b_1 & (n=1) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b_n = b_1 + \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}}_{①} \\ b_n = b_1 \end{cases}$$

①について、部分分数分解より

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$ を利用すると、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}.$$

また $b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$ より，b_n は

$\therefore b_n = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ … ② $(n \geqq 2)$

② に $n=1$ を代入すると $b_1 = 2 - \frac{1}{1} = 1$ より

条件を満たす よって $b_n = \frac{2n-1}{n}$

a_n に直すと， $\frac{a_n}{n} = \frac{2n-1}{n}$

$\therefore a_n = 2n-1$ $(n \geqq 1)$

(15) $a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$ $(0 \leqq a_1 \leqq 1)$

$0 \leqq a_1 \leqq 1$ より $a_1 = \sin^2\theta$ を満たす θ が

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ に存在する。このとき

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) \\
&= 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 \\
&= \sin^2(2\theta), = \sin^2(2^{2-1}\theta) \\
a_3 &= 4\sin^2(2\theta)(1-\sin^2(2\theta)) \\
&= 4\sin^2(2\theta)\cdot\cos^2(2\theta) = (2\sin 2\theta\cdot\cos 2\theta)^2 \\
&= \sin^2(4\theta), = \sin^2(2^{3-1}\theta), \text{（推測する）}
\end{aligned}
$$

一般項は $a_n = \sin^2(2^{n-1}\theta)$ となる。

(☺) $n=1$ のとき、$a_1 = \sin^2(2^{1-1}\cdot\theta)$

$= \sin^2\theta$ より、成立。

$n=k$ のとき、$a_k = \sin^2(2^{k-1}\theta)$ が成立すると

仮定すると、$a_{k+1} = 4\sin^2(2^{k-1}\theta)\left(1-\sin^2(2^{k-1}\theta)\right)$

$= 4\sin^2(2^{k-1}\theta)\cdot\cos^2(2^{k-1}\theta)$

$= \left(2\sin(2^{k-1}\theta)\cdot\cos(2^{k-1}\theta)\right)^2$

$= \sin^2(2^k\theta)$

よって、$k+1$ のときも成立する。以上から

$a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$ の一般項は

$a_n = \sin^2(2^{n-1}\theta)$ // □

(16) $a_{n+1}\sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$ $(-1 \leqq a_1 \leqq 1)$

$-1 \leqq a_1 \leqq 1$ より、$a_1 = \cos\theta$ となる

θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に存在する。このとき、

$a_2 = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$，$0 \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$\cos\dfrac{\theta}{2} \geqq 0$，$\therefore a_2 = \cos\dfrac{\theta}{2}$，（推測する

一般項は，$a_n = \cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$ となる.

(ⅱ) $n=1$ のとき，$a_1 = \cos\dfrac{\theta}{2^{1-1}} = \cos\theta$ より，成立

$n=k$ のとき，$a_k = \cos\dfrac{\theta}{2^{k-1}}$ が成立すると仮定すると.

$$a_{k+1} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2^k}}$$

ここで，$0 \leqq \dfrac{\theta}{2^k} < \dfrac{\pi}{2^k} < \dfrac{\pi}{2}$ $(k>1)$ より

$\cos\dfrac{\theta}{2^k} \geqq 0$，

よって $a_{k+1} = \cos\dfrac{\theta}{2^k}$，となり，$k+1$ のときも成立.

以上から，$a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+a_n}{2}}$ $(-1 \leqq a_1 \leqq 1)$

の一般項は $a_n = \cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$ // □